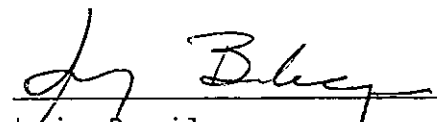


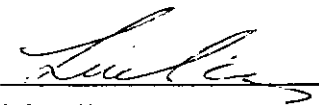
RESPOSTA DINÂMICA E ESTABILIDADE DE TUBOS
COM ESCOAMENTO INTERNO


Augusto Cesar Noronha Rodrigues Galeão

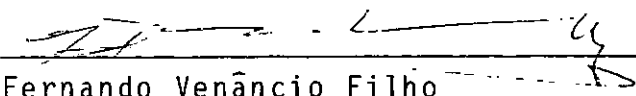
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

Aprovada por:

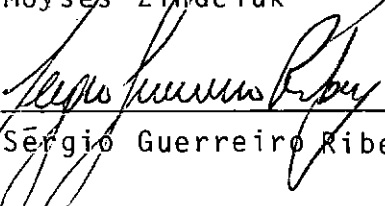

Luiz Bevilacqua


Liu Hsu


Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro


Fernando Venâncio Filho


Moyes Zindeluk


Sérgio Guerreiro Ribeiro

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1980.

A Ticiane e a Rodrigo.
À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A Luiz Bevilacqua, mais do que um orientador um grande amigo.

A Abimael Loula pelos anos de debates e trabalhos em co
mum.

Ao GRADCON, por sua experiência inovadora.

Ao LAC/CBPF, por sua proposta de trabalho.

A COPPE e ao CNPq pelo apoio à pós-graduação e pelo apoio financeiro.

A Cristina Raymundo pela dedicação na confecção datilog
ráfica deste trabalho.

A minha mulher.

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se um modelo de elementos finitos para o estudo dos problemas de: resposta transiente (linear e não-linear), vibrações livres (linear e não-linear) e estabilidade dinâmica de tubos conduzindo fluido.

Utilizando-se a descrição lagrangiana atualizada do princípio dos trabalhos virtuais deduz-se a forma incremental das equações do movimento. Linearizam-se essas equações em torno da configuração de equilíbrio e discute-se o problema de vibrações livres, mostrando-se que se o tubo tem extremidades fixas existe uma integral do movimento, e obtêm-se as expressões do hamiltoniano, do lagrangiano e do princípio de Hamilton aplicáveis a este sistema.

Usando-se uma generalização do quociente de Rayleigh analisa-se qualitativamente o comportamento dos auto-valores, com a variação de velocidade de escoamento e obtêm-se previsões teóricas sobre a estabilidade da posição de equilíbrio.

Mostra-se que, se a velocidade de escoamento é uma função periódica do tempo ocorre instabilidade por ressonância paramétrica e determinam-se as fronteiras dessas regiões.

Utilizando-se o programa automático de cálculo desenvolvido, obtêm-se mapas de estabilidade para tubos com diversas condições de apoio, comprova-se a existência do ciclo limite de flutter em um problema de vibrações não-lineares de um tubo em balanço, e comparam-se as soluções linear e não-linear em um problema de resposta dinâmica transiente.

SUMMARY

In this work, a finite element model is developed to analyze: linear and non-linear transient response and free vibrations problems and dynamic stability of pipes conveying fluid.

Making use of an updated lagrangian formulation for the principle of virtual work the incremental equations of motion are deduced. These equations are linearized about the equilibrium configuration and the free vibration problem is discussed, showing that an integral of motion exists when the pipes have fixed supports. Expressions for the hamiltonian, the lagrangian and the Hamilton's principle are then derived.

A generalized Rayleigh quotient is used to study the influence of flow velocity on the eigenvalues behaviour, and theoretical estimates for the stability of the equilibrium position are obtained.

It is shown that, for a periodic flow velocity, parametric resonance occurs and the boundaries of these instability regions are determined.

A computer program was developed and used to get some numerical results namely: stability maps for pipes with different support conditions; existence of a limit cycle flutter in a non-linear problem vibration, for a cantilever pipe; comparison of linear and non-linear solutions for a transient dynamic response problem.

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
CAPÍTULO I . INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II . DINÂMICA DE CORPOS ELÁSTICOS	9
2.1. Introdução	9
2.2. Corpo. Movimento. Configuração	10
2.2.1. Relações cinemáticas	13
2.2.2. Força.Princípios da conserva ção da quantidade de movimen to linear e angular	14
2.2.3. Equação do movimento	16
2.2.4. Princípio dos trabalhos vir- tuais.Forma fraca da equação do movimento	17
2.2.5. Equação constitutiva	23
2.3. Resposta dinâmica.Formulação varia- cional.Descrição lagrangiana refe- rencial	23
2.3.1. Forma incremental do P.T.V. ...	24
2.3.1.1. Descrição lagrangia na total	25
2.3.1.2. Descrição lagrangia na atualizada	27
2.4. Estabilidade Dinâmica	30
2.4.1. Estabilidade segundo Liapunov ..	31
2.4.2. Estabilidade infinitesimal. Forma fraca da equação de per turação	32

	<u>PAG.</u>
CAPÍTULO III. DINÂMICA DE TUBOS COM ESCOAMENTO INTERNO ...	36
3.1. Introdução	36
3.2. Um Modelo Mecânico	36
3.2.1. Teoria de vigas flexíveis. Pequenas deformações	39
3.2.2. Relações cinemáticas	40
3.2.3. Deslocamento, velocidade e aceleração	41
3.2.4. Deformação	42
3.2.5. Equação constitutiva	44
3.2.6. Trabalho virtual das forças externas	44
3.3. Equações do Movimento	50
3.4. Resposta Dinâmica Não-Linear. Forma Incremental	53
3.4.1. Forma incremental do P.T.V.	55
3.5. Estabilidade Infinitesimal	58
3.5.1. Movimento não-perturbado	58
3.5.2. Movimento perturbado	60
3.5.3. Forma fraca da equação de perturbação	63
3.6. Vibrações Lineares	65
3.6.1. Integral de Jacobi	65
3.6.1.1. Vibrações livres autônomas	66
3.6.1.2. Vibrações livres não autônomas	73
3.6.2. Princípio de Hamilton	73

	<u>PAG.</u>
3.6.3. Problema de auto-valor	74
3.6.3.1. Determinação dos pontos críticos. Caracterização dos modos de flambagem	75
3.6.3.2. Estudo qualitativo do comportamento dos auto-valores	77
3.7. Conclusões	96
CAPÍTULO IV . SOLUÇÕES APROXIMADAS	99
4.1. Introdução	99
4.2. Resposta Dinâmica	102
4.2.1. Integração numérica	104
4.2.2. Iteração de equilíbrio	105
4.3. Estabilidade Infinitesimal	106
4.3.1. Estabilidade em sistemas discretos	108
4.3.1.1. Equações variacionais ..	109
4.3.1.2. Teorema de Liapunov sobre a estabilidade da 1. ^a aproximação	112
4.3.1.3. Estabilidade de sistemas lineares autônomos	113
4.3.1.4. Sistemas lineares com coeficientes periódicos	114

4.3.2. Escoamento a velocidade cons	
tante	122
4.3.2.1. Forma variacional dis	
cretizada das equa -	
ções canônicas de Ha	
milton	122
4.3.3. Escoamento pulsátil	125

CAPÍTULO V . RESULTADOS NUMÉRICOS E CONCLUSÕES	131
5.1. Introdução	131
5.2. Estabilidade infinitesimal	131
5.2.1. Escoamento a velocidade cons-	
tante	131
5.2.2. Escoamento pulsátil	141
5.3. Vibrações livres	147
5.4. Resposta transiente	153
5.5. Conclusões	159
BIBLIOGRAFIA	165

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este trabalho iniciou-se originalmente, [1] a [3], de estudos cujo objetivo básico era a determinação da resposta dinâmica de vigas sobre a ação de uma massa móvel de comprimento finito, movendo-se com uma velocidade conhecida no tempo, e que procurava simular o efeito de um trem-tipo deslocando-se sobre uma ponte. Estes estudos constituíam uma extensão de trabalhos anteriores desenvolvidos por Yoshida [4]-[5], que analisara o problema considerando apenas massas concentradas. Um dos aspectos abordados nestes trabalhos prendia-se à caracterização da influência da relação (comprimento da massa/comprimento do vão da viga) sobre os coeficientes de impacto (relação máximo deslocamento dinâmico/deslocamento estático) calculados para um tempo de travessia, à velocidade constante, igual ao período fundamental de vibração, para o qual normalmente obtem-se a situação mais desfavorável. Observou-se [2], que à medida em que se aumentava o comprimento da massa, cresciam também os coeficientes de impacto e que quando a massa tinha comprimento infinito, a partir de certo valor da relação (massa móvel/massa da viga), o coeficiente de impacto era ilimitado. Em outras palavras, o deslocamento dinâmico crescia ilimitadamente com o tempo. Estes resultados sugeriam, obviamente, algum tipo de instabilidade introduzida, no sistema, pela massa de comprimento infinito movendo-se à velocidade constante. Surgia um dado novo, interessante do ponto de vista acadêmico, embora de pouca aplicabilidade para o problema original (difícil imaginar trens-tipos infinitos atra-

vessando uma ponte). No entanto, se este modelo matemático não se adequava àquele problema, ajustava-se razoavelmente bem, na representação do efeito de um fluido escoando continuamente numa tubulação. Para os coeficientes de impacto, não se encontrou na literatura, nenhuma referência com a qual os resultados obtidos pudessem ser comparados. Para o problema de vibrações induzidas em tubulações pelo escoamento de um fluido, verificou-se, posteriormente, que o número de publicações era surpreendentemente grande, a motivação inicial tendo sido criada na tentativa de explicarem as vibrações ocorridas na "Trans-Arabian Pipeline", presumivelmente causadas pelo escoamento do fluido; embora na referência [6] encontrem-se mencionados trabalhos anteriores, nos quais, este problema já havia sido previamente pesquisado. Por outro lado, a intensa atividade de pesquisadores envolvidos nesta área, nos últimos 30 anos, deve-se também à possibilidade de aplicação destes estudos em projetos de tubulações de centrais nucleares, bem como ao próprio interesse científico, já que este problema é interessante, não apenas do ponto de vista matemático, mas também do ponto de vista físico, pois o mesmo envolve a consideração de um sistema não-fechado [7], (no sentido de que diferentes partículas de fluido ocupam o interior do tubo em instantes diferentes), e representa um dos poucos casos em que uma força não-conservativa, do tipo "follower force", pode ser facilmente simulada em laboratório.

A influência dessa força sobre a estabilidade de um sistema de tubos rígidos articulados e acoplados com molas de torção, foi pesquisada por Benjamin [8], que utilizando as equações de Lagrange, válidas para um sistema discreto não-conservativo, deduziu o princípio de Hamilton e obteve a expressão dessa for-

ça não-conservativa. Neste mesmo trabalho, Benjamin, interpretando o significado dos termos obtidos para o problema discreto, generalizou estes resultados para o caso contínuo, mostrando que as deduções feitas anteriormente por Houssner [9] estavam incorretas, pois o mesmo utilizara a forma do princípio de Hamilton aplicável apenas no caso conservativo.

No trabalho [1], seus autores ao analisarem o problema da massa móvel, para o qual este mesmo princípio havia sido utilizado, chamaram a atenção para o fato de que a formulação apresentada era correta, enquanto a massa não alcançava a extremidade do vão, e ao estender este problema para a massa de comprimento infinito, a formulação variacional conduzia automaticamente à obtenção de uma condição de contorno natural, que representava exatamente a força não-conservativa identificada por Benjamin [8]. No tratamento numérico deste problema foi utilizado o método dos elementos finitos, e as integrações usadas para gerar as matrizes dos elementos levaram implicitamente na consideração deste efeito. Resultados numéricos, referentes a resposta transiente de tubos com escoamento interno, foram apresentados em [1]. Neste mesmo trabalho, alguns resultados relativos à instabilidade ("flutter") de tubos em balanço, sujeitos a um escoamento uniforme, foram comparados com resultados obtidos anteriormente por Paidoussis [10], que utilizou o método de Galerkin e a expansão da solução em termos das auto-funções do problema sem fluido, obtendo-se uma concordância bastante boa.

Estudando-se a estabilidade de tubulações com extremidades fixas, sob a ação de um escoamento uniforme, verificou-se que existiam valores de velocidades de fluxo (velocidades críticas) para as quais ocorria instabilidade por divergência (flam

bagem), o que comprovava os coeficientes de impacto ilimitados que tinham sido calculados [2]. Entretanto, resultados pouco convencionais, em se tratando de sistemas supostamente conservativos, eram obtidos para valores elevados da velocidade de escoamento, observando-se que nestas situações ocorriam a coincidência de auto-valores inicialmente distintos e posteriormente auto-valores complexos com parte real positiva. Alguns desses resultados foram apresentados na referência [11]. Resultados numéricos semelhantes já haviam sido obtidos anteriormente por Paidoussis e Issid [6], que introduziram a terminologia "coupled mode flutter" para definir este tipo de instabilidade.

O cálculo teórico exato da velocidade crítica (flambagem) já havia sido feito por Movchan [12], que utilizou o método direto de Liapunov no estudo da estabilidade de um tubo bi-apoiado, demonstrando que a posição trivial de equilíbrio é sempre instável para velocidades de escoamento superiores à velocidade crítica. Este mesmo autor mostrou ainda que, para velocidades abaixo da velocidade crítica, os auto-valores associados ao problema de vibrações livres eram todos imaginários puros, e que as vibrações correspondiam a ondas móveis deslocando-se ao longo do tubo. Movchan demonstrou ainda o caráter giroscópico deste sistema. O estudo da distorção dos modos de vibração, para diferentes condições de contorno, foi feito depois por Naguleswaran e Williams [13], que usando um esquema iterativo determinaram "exatamente" as frequências de vibração e a variação dos modos ao longo do eixo do tubo. Neste mesmo trabalho, os autores analisaram ainda o efeito da pressão interna na diminuição das frequências naturais, comparando os resultados teóricos com os resultados experimentais, obtendo boa concordância para valores

afastados da condição de frequência nula.

O efeito de um escoamento não uniforme sobre a estabilidade de tubos conduzindo fluido foi pesquisado por Bohn e Herrmann [14], que analisaram um sistema articulado constituído de dois tubos rígidos, observando que quando a velocidade de escoamento tinha pequenas oscilações periódicas em torno de um valor médio, instabilidade paramétrica e por ressonância combinatória eram obtidas. Quando a velocidade média aproximava-se do valor para o qual ocorria flutter à velocidade constante, as regiões de ressonância combinatória passavam a ter grande preponderância sobre as de ressonância paramétrica. Este mesmo estudo foi realizado em [6], [11], [15] e [16] no caso de tubos elásticos. Na referência [11], o método dos elementos finitos foi usado conjuntamente com o método proposto por Bolotin [17] para a obtenção das fronteiras das regiões de ressonância paramétrica, mostrando-se que para os tubos com extremidades fixas obtinha-se instabilidade para qualquer valor da velocidade de escoamento, o que não ocorria no caso do tubo em balanço. O estudo da influência de outros fatores, tais como, amortecimento estrutural e amortecimento viscoso, foi apresentado em [15], [6] e [16], sendo que neste último trabalho são feitas comparações com alguns resultados experimentais.

Na grande maioria dos trabalhos realizados nesta área, o tubo é sempre analisado de acordo com a teoria de vigas e o movimento do fluido é simulado como um conjunto de partículas movendo-se tangencialmente ao tubo.

Outros tipos de modelos foram propostos nas referências [18] a [20] nos quais o tubo é analisado usando-se a teoria de

casca e escoamento potencial para o fluido. Os resultados gerais obtidos com estes modelos indicam a existência de instabilidade associada aos modos de casca, e quanto mais longo ou mais espesso o tubo, tanto mais instabilidade ocorrerá nos modos de viga. A consideração de tubos curvos ou de seção variável pode ser encontrada nas referências [21] a [25].

A consideração de não-linearidade geométrica no modelo de viga foi feita na referência [26], que determinou a variação dos períodos de vibração com a velocidade de escoamento. Holmes, nos trabalhos [27] a [29], estudou a influência da consideração dos termos não-lineares, no problema da estabilidade de tubos com extremidades fixas, mostrando que a única forma possível de instabilidade é por divergência, embora o modelo linear previsse instabilidade por flutter. E na referência [30], o autor, usando a descrição lagrangiana do princípio dos trabalhos virtuais, determinou a resposta dinâmica transiente não-linear comparando-a com a solução linear.

Uma característica comum à quase totalidade dos trabalhos citados anteriormente é que os estudos envolvidos nos mesmos relacionam-se sempre com o problema da estabilidade de tubulações, exceção feita aos trabalhos [1] e [30], onde o problema de resposta dinâmica é também analisado. Além disso, soluções aproximadas são quase que exclusivamente obtidas pelo método de Galerkin, com funções-testes assumidas em todo o domínio, ao passo que em [1], [11], [31] e [32] o método dos elementos finitos é usado, possibilitando com o mesmo procedimento tratar diferentes condições de contorno, apoios elásticos, variação da seção de tubulação, ou ainda analisar, por exemplo, tubulações contínuas.

Neste trabalho desenvolve-se um modelo para a análise dinâmica de tubulações com escoamento interno, estudando-se os problemas de: resposta dinâmica transiente (linear e não-linear), vibrações livres (linear e não-linear) e estabilidade infinitesimal, nas situações em que a velocidade de escoamento é constante ou uma função periódica do tempo.

No capítulo II são apresentados alguns resultados da mecânica dos meios contínuos, objetivando-se fundamentalmente a formulação variacional dos problemas de resposta dinâmica e estabilidade de corpos elásticos.

No capítulo III, usando-se as formulações gerais apresentadas anteriormente, estabelece-se um modelo unidimensional para o estudo do efeito do escoamento do fluido sobre os movimentos transversais do tubo. Utilizando-se a descrição lagrangiana atualizada do princípio dos trabalhos virtuais deduz-se a forma incremental para o estudo da resposta dinâmica não-linear. Obtêm-se a equação de perturbação para a análise da estabilidade infinitesimal da posição de equilíbrio e discute-se o problema de vibrações livres em torno desta posição. Mostra-se que, se as tubulações têm extremidades fixas existe uma integral do movimento, que o hamiltoniano se conserva, demonstrando-se o caráter giroscópico destes sistemas. Usando-se esta mesma formulação, caracteriza-se a força não-conservativa gerada pelo escoamento do fluido, quando a tubulação tem alguma extremidade livre, obtendo-se o lagrangiano do sistema e a expressão do princípio de Hamilton. Usa-se o quociente de Rayleigh, conforme sugerido em [33] e analisa-se qualitativamente o comportamento dos auto-valores com a variação da velocidade de escoamento, obtendo-se previsões sobre a estabilidade da posição de equilí -

brío.

O capítulo IV trata da obtenção de soluções aproximadas dos problemas variacionais formulados no capítulo III, e o método dos elementos finitos é usado para a geração dos espaços de aproximação.

Para os problemas de resposta dinâmica transiente, e de vibrações livres, o algoritmo de Newmark [34] é utilizado para a integração do sistema de equações diferenciais incrementais ordinárias de segunda ordem, resultantes da discretização de elementos finitos.

Utilizando-se a expressão do lagrangiano, determinam-se, para o sistema discretizado, as equações canônicas de Hamilton e discute-se algumas propriedades do problema de auto-valor correspondente. Nas situações em que a velocidade de escoamento é uma função periódica do tempo, as fronteiras das regiões de ressonância paramétrica são determinadas usando-se o método proposto na referência [17].

Finalmente, no capítulo V são mostrados alguns resultados numéricos e algumas conclusões são apresentadas.

CAPÍTULO II

DINÂMICA DE CORPOS ELÁSTICOS

2.1. Introdução

O problema geral da mecânica dos meios contínuos consiste em: dado um corpo e um sistema de forças atuando sobre ele, durante o seu movimento, determinar o campo de deslocamentos, o estado de deformação e de tensão. Respeitados os princípios básicos da mecânica, o modelo físico estará bem representado matematicamente se for possível estabelecer:

- i) as equações do movimento do corpo; que correspondem às equações de equilíbrio dinâmico.
- ii) as relações cinemáticas; relações entre deformação e deslocamento.
- iii) as relações constitutivas; relações entre força e movimento.

Dentro deste contexto situa-se o estudo da dinâmica de corpos deformáveis; e em particular, daqueles constituídos de materiais elásticos lineares. As soluções em "forma fechada" destes problemas, são possíveis em situações particulares. Com isto torna-se necessário a busca de soluções aproximadas, e uma abordagem conveniente neste caso é conseguida se se adota uma formulação variacional.

Dentre os princípios variacionais clássicos, o princípio dos trabalhos virtuais (modelo de deslocamento) tem se mostrado adequado para a obtenção de soluções numéricas desse problema [42].

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos da mecânica dos meios contínuos; esta apresentação sendo baseada no trabalho de Gurtin [43].

Em particular, deduz-se a descrição lagrangiana do princípio dos trabalhos virtuais, bem como sua forma incremental. Estabelece-se em seguida o problema variacional da resposta dinâmica de corpos elásticos e apresenta-se formalmente o conceito de Liapunov para a estabilidade de um movimento.

2.2. Corpo. Movimento. Configuração.

O corpo B é definido como um conjunto de pontos materiais X , juntamente com um conjunto de configurações e uma densidade ρ definida para cada configuração.

O movimento de B é a função:

$$p: B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ tal que:}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ e cada $X \in B$

$$\underline{x} = p(X, t) \tag{2.1}$$

é o lugar ocupado pelo ponto material X , no instante t .

Desta forma a configuração de B no instante t é:

$$B_t = p(B, t) ; \quad B_t \subset \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

e sua trajetória:

$$\{(\underline{x}, t) ; \underline{x} \in B_t \text{ e } t \in \mathbb{R}\} \tag{2.3}$$

O movimento p é normalmente referido a uma configuração de referência B_c , não necessariamente uma configuração real do corpo, mas sim uma configuração possível. Assim, definindo-se o mapeamento:

$$\underline{c}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \underline{X} = \underline{c}(\mathbf{X}) \quad (2.4)$$

pode-se então estudar o movimento do corpo, pelo mapeamento de uma região de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , dado por:

$$\underline{p}_c: \mathbb{B}_c \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

De (2.1) e (2.4)

$$\underline{x} = \underline{p}[\underline{c}^{-1}(\underline{X}), t] = \underline{p}_c(\underline{X}, t) \quad (2.5)$$

sendo \underline{p}_c o movimento de \mathbb{B} relativo a \mathbb{B}_c (fig. 2.1)

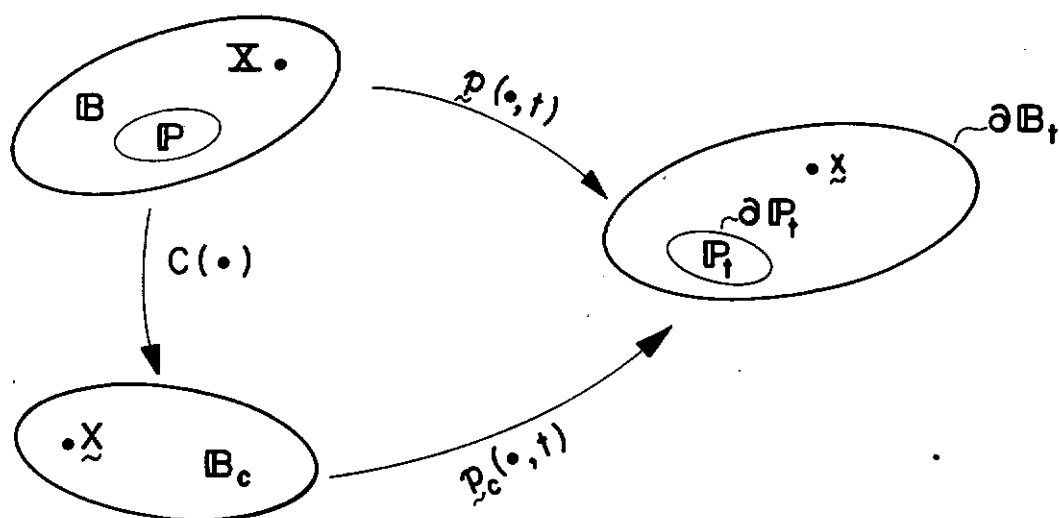


Fig. 2.1 - Configurações do corpo

- Deformação

Define-se deformação, ao mapeamento de uma configuração em outra configuração qualquer do corpo. Dessa forma para um t fixo, o mapeamento $\underline{p}_c(\cdot, t)$ é a deformação de \mathbb{B}_c para \mathbb{B}_t .

Assume-se sempre que \underline{p}_c é suficientemente diferenciável e que o seu gradiente:

$$\nabla \underline{p}_c = \underline{F} \quad (2.6a)$$

cumpra com a condição [43]

$$\det \underline{F} > 0 \quad (2.6b)$$

onde o símbolo ∇ denota gradiente com relação à variável \underline{x} .

- Massa

A cada parte \mathbb{P} de \mathbb{B} está associada uma medida positiva chamada massa de \mathbb{P} . Assume-se que esta distribuição de massa é uma função absolutamente contínua do volume, e portanto pode-se escrever

$$m(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho(\underline{x}, t) dV_t \quad (2.7a)$$

- Conservação de massa

Considera-se que a densidade ρ varia de configuração para configuração, mas que a massa $m(\mathbb{P})$ de uma parte qualquer de \mathbb{B} se conserva, isto é:

$$m(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho dV_t = \int_{\mathbb{P}_c} \rho_c dV_c \quad (2.7b)$$

Se dV_t e dV_c representam elementos de volume na configuração \mathbb{B}_t e \mathbb{B}_c respectivamente, e se dV_t é a imagem de dV_c sob o mapeamento \underline{p}_c , então (2.7b) implica em:

$$\rho dV_t = \rho_c dV_c \quad (2.7c)$$

$$\text{ou ainda: } \rho_c = \det \underline{F} \rho \quad (2.7d)$$

onde $\det \underline{F}$ é o Jacobiano da transformação (2.5).

2.2.1. Relações cinemáticas

- Tensor de deformação de Green-Lagrange

De acordo com as relações (2.5) e (2.6a), tem-se:

$$d\underline{x} = \nabla \underline{p}_c d\underline{X} = \underline{F} d\underline{X} \quad (2.8a)$$

e definindo-se:

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \cdot \underline{F} d\underline{X} = \underline{F}^T \underline{F} d\underline{X} \cdot d\underline{X}$$

$$dS^2 = d\underline{X} \cdot d\underline{X}$$

onde $(.)$ denota produto escalar de vetores ou tensores

Obtem-se:

$$\frac{1}{2}(ds^2 - dS^2) = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) d\underline{X} \cdot d\underline{X} = \underline{E} d\underline{X} \cdot d\underline{X} \quad (2.8b)$$

onde \underline{I} é o tensor identidade.

De acordo com (2.8b) o tensor simétrico

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) \quad (2.9)$$

conhecido como tensor de deformação de Green-Lagrange, fornece uma medida da deformação.

- Deslocamento

A função:

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{p}_c(\underline{X}, t) - \underline{X} = \underline{u} \quad (2.10)$$

é o deslocamento do corpo ao passar de \mathbb{B}_c a \mathbb{B}_t .

A partir de (2.6a)

$$\underline{F} = \underline{I} + \nabla \underline{u} \quad (2.11)$$

que levada em (2.9) fornece:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla u} + \underline{\nabla u}^T + (\underline{\nabla u})^T \underline{\nabla u}] \quad (2.12)$$

- Velocidade e Aceleração:

As funções vetoriais:

$$\underline{\dot{u}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\underline{p}_c(\underline{X}, t)] = \underline{\dot{u}}$$

$$\underline{\ddot{u}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\underline{p}_c(\underline{X}, t)] = \underline{\ddot{u}} \quad (2.13a-b)$$

definem a velocidade e aceleração do corpo referidos à configuração de referência \mathbb{B}_c .

2.2.2. Força. Princípios da Conservação da Quantidade de Movimento Linear e Angular.

- Forças

Provêm da interação entre o corpo e o meio que o rodeia (forças externas) e da interação entre distintas partes do corpo (forças internas) durante o movimento deste.

Consideram-se forças do tipo [43]

i) força de massa - funções absolutamente contínuas do volume:

$$\underline{f}_b(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \underline{b} \, dV_t \quad (2.14a)$$

ii) forças de contato - funções absolutamente contínuas da área da superfície de contato $\partial\mathbb{P}_t$ (contorno de \mathbb{P}_t).

$$\underline{f}_s(\mathbb{P}) = \int_{\partial\mathbb{P}_t} \underline{s} \, dA_t \quad (2.14b)$$

onde:

$\underline{b} = \underline{b}(\underline{x}, t)$ é a densidade de força de massa e

$\underline{s} = \underline{s}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ é a densidade de força de superfície,

sendo \underline{n} a normal exterior a $\partial \mathbb{P}_t$.

Assim a força resultante que atua na parte \mathbb{P} de \mathbb{B} na configuração \mathbb{B}_t é:

$$\underline{f}(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \underline{b} dV_t + \int_{\partial \mathbb{P}_t} \underline{s} dA_t \quad (2.15a)$$

e o momento resultante dessa força em relação a uma origem \underline{x}_0 , é:

$$\underline{M}(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{b} dV_t + \int_{\partial \mathbb{P}_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{s} dA_t \quad (2.15b)$$

onde o símbolo \wedge denota produto vetorial.

- Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear

De acordo com este princípio, para toda parte \mathbb{P} de \mathbb{B} e todo instante t , tem-se:

$$\dot{\underline{f}}(\mathbb{P}) = \underline{f}(\mathbb{P})$$

$$\text{onde } \underline{f}(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \dot{\underline{x}} dV_t \quad (2.16a-b)$$

é a quantidade de movimento linear. Assim de acordo com essas relações e usando o princípio de conservação de massa (eq. 2.7b)

$$\underline{f}(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \ddot{\underline{x}} dV_t \quad (2.16c)$$

- Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Para toda parte \mathbb{P} de \mathbb{B} e todo instante t , tem-se:

$$\dot{\underline{A}}(\underline{P}) = \underline{M}(\underline{P})$$

$$\text{sendo: } \underline{A}(\underline{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho(\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \dot{\underline{x}} \, dV_t \quad (2.17a-b)$$

a quantidade de movimento angular. De (2.17a-b) e (2.7b) obtem-se:

$$\underline{M}(\underline{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho(\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \ddot{\underline{x}} \, dV_t \quad (2.17c)$$

2.2.3. Equação do movimento

Um corpo qualquer durante o seu movimento e sob a ação de um sistema de forças $(\underline{s}, \underline{b})$, deve obedecer aos princípios de conservação da quantidade de movimento linear e de conservação da quantidade de movimento angular, de forma a se ter garantida as condições de equilíbrio dinâmico.

Uma forma equivalente de se ter satisfeito os dois princípios acima citados é expressa pelo teorema de Cauchy [43]

- Teorema I: Teorema de Cauchy

A condição necessária e suficiente, para que os princípios de conservação da quantidade de movimento linear e angular sejam satisfeitos, é que exista um campo tensorial simétrico $\underline{I}(\underline{x}, t)$ (tensor de Cauchy), definido sobre a trajetória, tal que:

$$i) \quad \underline{s}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{I}(\underline{x}, t) \underline{n} \quad (2.18a)$$

ii) \underline{p} , \underline{s} , \underline{b} , satisfaçam a equação do movimento

$$\text{div } \underline{I} + \rho \underline{b} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad , \quad (2.18b)$$

onde $\ddot{\underline{u}}(\underline{x}, t)$ é o campo de acelerações; e o símbolo div indica divergência em relação a \underline{x} .

A equação (2.18b) corresponde à forma local do princípio de conservação da quantidade de movimento linear e pode ser obtida diretamente de (2.16c), usando-se a condição (2.18a) e o teorema da divergência. Satisfeita (2.18b), a simetria do tensor \underline{T} é equivalente ao princípio de conservação da quantidade de movimento angular eq. (2.17c).

2.2.4. Princípio dos trabalhos virtuais - Forma fraca da equação do movimento.

Uma outra forma de se ter garantida a condição de equilíbrio dinâmico, é fornecida pelo princípio dos trabalhos virtuais.

Seja, então, $(\underline{s}, \underline{b})$ o sistema de forças atuando sobre \mathbb{B} na configuração \mathbb{B}_t . Suponha-se que nessa configuração o corpo \mathbb{B} esteja sujeito a forças externas \underline{s}^* (conhecidas), atuando sobre parte de sua superfície.

$$\underline{T} \underline{n} = \underline{s}^* \quad \text{em} \quad \partial_s \mathbb{B}_t, \quad (2.19a)$$

e a vínculos externos sobre parte da fronteira $\partial_u \mathbb{B}_t$, que prescrevem os deslocamentos dos pontos $\underline{x} \in \partial_u \mathbb{B}_t$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^* \quad \text{em} \quad \partial_u \mathbb{B}_t \quad (2.19b)$$

$$\text{e que: } \partial_s \mathbb{B}_t \cap \partial_u \mathbb{B}_t = \text{vazio} \quad (2.19c)$$

Definindo-se agora:

i) Deslocamento cinematicamente admissível ao campo vetorial regular $\underline{u}(\underline{x}, t)$ satisfazendo (2.19b)

ii) Conjunto cinematicamente admissível

$$\mathcal{V} \equiv \{ \underline{u}(\underline{x}, t); \underline{u}|_{\partial_u \mathbb{B}_t} = \underline{u}^* \} \quad (2.20a)$$

iii) Espaço das variações admissíveis

$$\mathcal{V} \equiv \{\underline{\hat{u}}(\underline{x}, t); \underline{\hat{u}}|_{\partial \mathbb{B}_t} = 0\} \quad (2.20b)$$

onde o elemento $\underline{\hat{u}} \in \mathcal{V}$ é chamado deslocamento virtual, tem-se de acordo com a equação (2.18b) :

$$\int_{\mathbb{B}_t} (\text{div } \underline{T} + \rho \underline{\hat{b}} - \rho \underline{\hat{u}}) \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_t = 0 \quad (2.21)$$

O primeiro termo de (2.21) pode ser escrito como:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \text{div } \underline{T} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_t = \int_{\mathbb{B}_t} [\text{div}(\underline{T}^T \underline{\hat{u}}) - \underline{T} \cdot \text{grad } \underline{\hat{u}}] \, dV_t \quad (2.22)$$

onde grad representa o gradiente em relação a \underline{x} .

Assumindo-se que \mathbb{B}_t é suficientemente regular e simplesmente conexo e aplicando-se o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \text{div}(\underline{T}^T \underline{\hat{u}}) \, dV_t = \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{T}^T \underline{\hat{u}} \cdot \underline{n} \, dA_t = \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{T} \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_t \quad (2.23)$$

De (2.19a) e de (2.20b)

$$\int_{\mathbb{B}_t} \text{div}(\underline{T}^T \underline{\hat{u}}) \, dV_t = \int_{\partial_s \mathbb{B}_t} \underline{s}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_t \quad \forall \underline{\hat{u}} \in \mathcal{V} \quad (2.24)$$

Substituindo-se (2.22) em (2.21) e tendo-se em conta (2.24), vem:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \rho \underline{\hat{b}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_t + \int_{\partial_s \mathbb{B}_t} \underline{s}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_t \equiv \int_{\mathbb{B}_t} (\rho \underline{\hat{u}} \cdot \underline{\hat{u}} + \underline{T} \cdot \text{grad } \underline{\hat{u}}) \, dV_t \quad (2.25)$$

Observando-se que o lado esquerdo de (2.25) representa o trabalho realizado pelas forças externas sob o deslocamento virtual $\underline{\hat{u}}$ (trabalho virtual), e denotando-o por \hat{W} , isto é:

$$\bar{W} = \int_{\mathbb{B}_t} \rho \underline{b} \cdot \underline{\bar{u}} \, dV_t + \int_{\partial_s \mathbb{B}_t} \underline{s}^* \cdot \underline{\bar{u}} \, dA_t, \quad (2.26)$$

obtem-se:

$$\bar{W} = \int_{\mathbb{B}_t} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{\bar{u}} \, dV_t + \int_{\mathbb{B}_t} \underline{T} \cdot \text{grad} \, \underline{\bar{u}} \, dV_t \quad \forall \underline{\bar{u}} \in \bar{\mathcal{V}}, \quad (2.27)$$

que é a expressão do P.T.V. referido à configuração atual \mathbb{B}_t . Com base nos resultados anteriores pode-se estabelecer o seguinte princípio variacional [45].

- Teorema II: Princípio dos trabalhos virtuais

Seja $(\underline{s}, \underline{b})$ o sistema de forças atuando sobre \mathbb{B} , durante o movimento. A condição necessária e suficiente, para que a forma local do princípio de conservação da quantidade de movimento linear seja satisfeita em todo ponto interior a \mathbb{B}_t é que, para toda parte \mathbb{P} de \mathbb{B} e todo tempo t se verifique:

$$\int_{\mathbb{P}_t} \rho \underline{b} \cdot \underline{\bar{u}} \, dV_t + \int_{\partial \mathbb{P}_t} \underline{s} \cdot \underline{\bar{u}} \, dA_t = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{\bar{u}} \, dV_t + \int_{\mathbb{P}_t} \underline{T} \cdot \text{grad} \, \underline{\bar{u}} \, dV_t$$

para todo $\underline{\bar{u}} \in \bar{\mathcal{V}}$.

A descrição referencial do P.T.V. pode ser obtida de (2.27) representando-se todas as grandezas em uma certa configuração de referência. Para tanto vai se definir $\underline{b}(\underline{X}, t)$, $\underline{s}(\underline{X}, t)$, $\underline{u}(\underline{X}, t)$ e $\ddot{\underline{u}}(\underline{X}, t)$ como sendo a descrição referencial da densidade de força de massa, da densidade de força de superfície, do deslocamento e da aceleração respectivamente.

A passagem das integrais que ocorrem em (2.26) para a configuração de referência, pode ser feita observando-se que:

$$\rho \, dV_t = \rho_c \, dV_c \quad (\text{conservação de massa}) \quad (2.28)$$

$$\underline{s}^* \, dA_t = \underline{s}^* \, dA_c \quad (2.29)$$

onde \underline{s}^* é a densidade de força de superfície na configuração de referência, ou seja de (2.14b)

$$\underline{s}_s(\mathbb{P}) = \int_{\partial \mathbb{P}_c} \underline{s} \, dA_c = \int_{\partial \mathbb{P}_t} \underline{s} \, dA_t \quad (2.30)$$

Partindo de (2.29) e tendo em vista (2.18a)

$$\underline{T} \underline{n} \, dA_t = \underline{S}_1 \underline{n}_c \, dA_c \quad (2.31)$$

onde \underline{n}_c é a normal unitária exterior a $\partial \mathbb{B}_c$ (contorno de \mathbb{B}_c) e

$$\underline{S}_1 = \frac{\rho_c}{\rho} \underline{T} \underline{F}^{-T} \quad (2.32)$$

é o tensor de Piolla-Kirchoff de 1.^a espécie.

Tendo-se em conta (2.28)-(2.32) escreve-se:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \rho \, \underline{b} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_t = \int_{\mathbb{B}_c} \rho_c \, \underline{b} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_c \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{s}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_t &= \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{T} \underline{n} \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_t = \int_{\partial \mathbb{B}_c} \underline{S}_1 \underline{n}_c \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_c = \\ &= \int_{\partial \mathbb{B}_c} \underline{s}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_c \end{aligned} \quad (2.34)$$

De (2.26)-(2.33) e (2.34), obtém-se:

$$\tilde{W} = \int_{\mathbb{B}_c} \rho_c \, \underline{b} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_c + \int_{\partial \mathbb{B}_c} \underline{s}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dA_c \quad (2.35)$$

que representa o trabalho virtual das forças externas atuando em \mathbb{B} , na configuração \mathbb{B}_t , porém referido à configuração \mathbb{B}_c .

Ainda de acordo com (2.28) e tendo em vista (2.13b) a primeira integral de (2.27) passa a ser escrita como:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_t = \int_{\mathbb{B}_c} \rho_c \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_c \quad (2.36)$$

A mudança da segunda integral de (2.27) para a configuração de referência, exige o conhecimento das leis da transformação dos tensores $\underline{\mathbb{I}}$ e $\text{grad } \underline{\hat{u}}$, dadas por:

$$\underline{\mathbb{I}} = \frac{\rho}{\rho_c} \underline{\mathbb{F}} \underline{\mathbb{S}}_1^T$$

$$\text{grad } \underline{\hat{u}} = \nabla \underline{\hat{u}} \underline{\mathbb{F}}^{-1} \quad (2.37a-b)$$

Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\mathbb{I}} \cdot \text{grad } \underline{\hat{u}} \, dV_t &= \int_{\mathbb{B}_c} \underline{\mathbb{F}} \underline{\mathbb{S}}_1^T \cdot \nabla \underline{\hat{u}} \underline{\mathbb{F}}^{-1} dV_c = \\ &= \int_{\mathbb{B}_c} \text{tr}(\underline{\mathbb{F}} \underline{\mathbb{S}}_1^T \nabla \underline{\hat{u}} \underline{\mathbb{F}}^{-1}) dV_c = \int_{\mathbb{B}_c} \text{tr}(\underline{\mathbb{F}}^{-1} \underline{\mathbb{F}} \underline{\mathbb{S}}_1^T \nabla \underline{\hat{u}}) dV_c = \\ &= \int_{\mathbb{B}_c} \text{tr}(\underline{\mathbb{S}}_1^T \nabla \underline{\hat{u}}) dV_c \end{aligned}$$

Introduzindo-se agora o tensor simétrico

$$\underline{\mathbb{S}}_2 = \underline{\mathbb{F}}^{-1} \underline{\mathbb{S}}_1$$

conhecido como tensor de Piolla-Kirchoff de segunda espécie, obtem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\mathbb{I}} \cdot \text{grad } \underline{\hat{u}} \, dV_t &= \int_{\mathbb{B}_c} \text{tr}(\underline{\mathbb{S}}_2^T \underline{\mathbb{F}}^T \nabla \underline{\hat{u}}) dV_c = \\ &= \int_{\mathbb{B}_c} \underline{\mathbb{S}}_2 \cdot \underline{\mathbb{F}}^T \nabla \underline{\hat{u}} \, dV_c \quad (2.38) \end{aligned}$$

Assim de acordo com (2.35), (2.36), (2.38), a equação (2.27) passa a ser escrita como:

$$\tilde{W} = \int_{B_C} \rho_C \ddot{u} \cdot \tilde{u} \, dV_C + \int_{B_C} S_2 \cdot \tilde{F}^T \nabla \tilde{u} \, dV_C \quad (2.39)$$

Por outro lado fazendo-se uso de (2.11)

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{\Pi} + \nabla \tilde{u} \\ \tilde{W} &= \int_{B_C} \rho_C \ddot{u} \cdot \tilde{u} \, dV_C + \int_{B_C} S_2 \cdot [\tilde{\Pi} + (\nabla \tilde{u})^T] \nabla \tilde{u} \, dV_C \end{aligned} \quad (2.40)$$

e tendo-se em conta a simetria do tensor S_2 , obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \int_{B_C} \rho_C \ddot{u} \cdot \tilde{u} \, dV_C + \int_{B_C} S_2 \cdot \frac{1}{2} [\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T + (\nabla u)^T \nabla \tilde{u} + \\ &\quad + (\nabla \tilde{u})^T \nabla u] \, dV_C \end{aligned} \quad (2.41)$$

Recordando-se agora a definição do tensor de deformações de Green Lagrange (eq. 2.12) e definindo-se:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} [\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T + (\nabla u)^T \nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T \nabla u]$$

a equação (2.41), toma a forma:

$$\tilde{W} = \int_{B_C} \rho_C \ddot{u} \cdot \tilde{u} \, dV_C + \int_{B_C} S_2 \cdot \tilde{E} \, dV_C \quad (2.42)$$

que representa a expressão do P.T.V. referido à configuração de referência.

Do mesmo modo que (2.27) é equivalente a (2.18b) (Teorema II), (2.42) é equivalente a:

$$\text{Div } S_1 + \rho_C \underline{b} = \rho_C \ddot{u} \quad (2.43)$$

onde Div denota divergência com relação a \underline{x} , e:

$$\underline{S}_1 = \underline{F} \underline{S}_2 \quad ; \quad \underline{S}_2 = \underline{S}_2^T = (\det \underline{F}) \underline{F}^{-1T} \underline{F}^{-T}$$

A equação (2.43) corresponde à descrição referencial de (2.18b).

2.2.5. Equação constitutiva

Como foi dito na introdução deste capítulo, a equação constitutiva define uma relação entre força e movimento. Em outras palavras, esta relação estabelece como o material, do qual o corpo é constituído, responde a uma dada solicitação. No estabelecimento dessa resposta certos princípios [43], [44] devem ser respeitados, para que a relação obtida possa definir uma equação constitutiva para uma classe de materiais. Uma discussão destes princípios foge ao objetivo deste capítulo. Dir-se-á apenas que para materiais elásticos uma relação constitutiva possível, seria:

$$\underline{S}_2 = \underline{S}_2(\underline{E}) \quad (2.44)$$

2.3. Resposta dinâmica - Formulação variacional - Descrição lagrangiana referencial

Estabelecidas as relações anteriores: i) equação de equilíbrio dinâmico; ii) relações cinemáticas; iii) equação constitutiva e definindo-se as condições iniciais do movimento, dados em termos de deslocamento e velocidade iniciais, ou seja

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{X}, 0) &= \underline{u}_0(\underline{X}) \\ \dot{\underline{u}}(\underline{X}, 0) &= \dot{\underline{u}}_0(\underline{X}) \end{aligned} \quad (2.45a-b)$$

pode-se agora apresentar formalmente uma formulação variacional para o problema da resposta dinâmica de corpos elásticos.

Dado um corpo elástico B , de densidade ρ_c , submetido à ação de um sistema de forças $(\underline{f}, \underline{b})$, determinar o par $(\underline{u}, \underline{S}_2)$, on

de

$$\underline{u} \in \mathcal{V} ; \quad \underline{S}_2 \text{ é simétrico,}$$

satisfazendo:

- i) Princípio dos trabalhos virtuais - equação (2.42)
- ii) Relações cinemáticas - equações (2.9)-(2.12)
- iii) Equação constitutiva - equação (2.44)
- iv) Condições iniciais - equação (2.45)

Ao se utilizar a (eq. 2.42), automaticamente já se está definindo um critério de aproximação para a obtenção de soluções aproximadas. Por outro lado amplia-se o conjunto de soluções admissíveis, já que esta equação exige menos regularidade do que a forma local da equação do movimento (eq. 2.43). A busca de soluções em um espaço maior de funções candidatas, justifica a terminologia "forma fraca" em contraposição com o conceito de "forma forte" (maior regularidade \leftrightarrow mais restrições) associado à equação diferencial (2.43).

2.3.1. Forma Incremental do P.T.V.

Na solução do problema variacional proposto na seção anterior - resposta dinâmica não-linear - é conveniente o uso de uma formulação incremental das equações do movimento. Nesta formulação busca-se estabelecer um caminharmento sobre a trajetória do corpo, isto é, supondo-se que em um dado instante $t=t_r$, seja conhecida a configuração de equilíbrio dinâmico (B_r) pretende-se a partir desta configuração, determinar no instante $t_{r+1} = t_r + \Delta t$ a nova configuração B_{r+1} do corpo.

2.3.1.1. Descrição lagrangiana total

Nesta formulação, todas as configurações estarão sempre referidas à mesma configuração B_C . Se se particulariza o P.T.V., para a configuração desconhecida B_{r+1} , de acordo com (2.39), tem-se:

$${}^{r+1}_C \tilde{W} = \int_{B_C} \rho_C {}^{r+1}_C \tilde{u} \cdot {}_C \tilde{u} \, dV_C + \int_{B_C} {}^{r+1}_C S_2 \cdot {}^{r+1}_C F^T \nabla_C {}_C \tilde{u} \, dV_C \quad (2.46)$$

Definindo-se agora as relações incrementais:

$${}^{r+1}_C \tilde{u} = {}^r_C \tilde{u} + {}_C \tilde{u} \quad (2.47)$$

$${}^{r+1}_C S_2 = {}^r_C S_2 + {}_C S_2 \quad (2.48)$$

onde o índice inferior esquerdo indica a configuração de referência e o índice superior, a configuração do corpo em cada instante, e sendo ${}_C \tilde{u}$ e ${}_C S_2$ respectivamente os incrementos de: deslocamento e do tensor de P-K de segunda espécie, da configuração B_r para B_{r+1} ; e tendo-se em conta a definição do gradiente de deformação (eq. 2.11), vem:

$${}^{r+1}_C F = \underline{\underline{I}} + \nabla_C {}^r_C \tilde{u} + \nabla_C {}_C \tilde{u}$$

$${}^{r+1}_C F = {}^r_C F + \nabla_C {}_C \tilde{u} \quad (2.49a-b)$$

A partir de (2.49) e de (2.9) o tensor de deformação de Green-Lagrange pode ser escrito como:

$${}^{r+1}_C E = {}^r_C E + {}_C E$$

onde:

$${}_C E = \frac{1}{2} [\nabla_C {}^r_C \tilde{u} + \nabla_C {}^r_C \tilde{u}^T + \nabla_C {}_C \tilde{u}^T \nabla_C {}_C \tilde{u}]$$

$${}_c\tilde{E} = {}_c\tilde{E}_\ell + {}_c\tilde{E}_{n\ell}$$

$${}_c\tilde{E}_\ell = \frac{1}{2} [\nabla_{{}_c\tilde{u}} \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T + (\nabla_{{}_c\tilde{u}}^r)^T \nabla_{{}_c\tilde{u}} + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}}^r]$$

$${}_c\tilde{E}_{n\ell} = \frac{1}{2} [\nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}}] \quad (2.50a-c)$$

Substituindo-se (2.48) e (2.49) em (2.46), obtem-se:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}{}_c\tilde{W} = & \int_{{}_B}_c \rho_c {}^{r+1}{}_c\tilde{u} \cdot {}_c\tilde{u} \, dV_c + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot \frac{1}{2} [\nabla_{{}_c\tilde{u}} + \\ & + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T + (\nabla_{{}_c\tilde{u}}^r)^T \nabla_{{}_c\tilde{u}} + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}}^r] \, dV_c + \\ & + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot \frac{1}{2} [(\nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}} + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}})] + \\ & + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot \frac{1}{2} [\nabla_{{}_c\tilde{u}} + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T + (\nabla_{{}_c\tilde{u}}^r)^T \nabla_{{}_c\tilde{u}} + \\ & + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}}^r + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^r \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T + \nabla_{{}_c\tilde{u}}^T \nabla_{{}_c\tilde{u}}^r] \, dV_c \end{aligned}$$

e tendo-se em vista as definições (2.50a-c), escreve-se:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}{}_c\tilde{W} = & \int_{{}_B}_c \rho_c {}^{r+1}{}_c\tilde{u} \cdot {}_c\tilde{u} \, dV_c + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot {}_c\tilde{E} \, dV_c + \\ & + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot {}_c\tilde{E}_{n\ell} \, dV_c + \int_{{}_B}_c {}^rS_2 \cdot {}_c\tilde{E}_\ell \, dV_c \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por outro lado, o tensor incremental ${}_c\tilde{S}_2$ está relacionado com o tensor ${}_c\tilde{E}$, através do tensor constitutivo ${}_c\tilde{E}$, isto é,

$${}^{r+1}{}_c\tilde{S}_2 = {}^r{}_c\tilde{S}_2 + {}_c\tilde{E} {}_c\tilde{E} \quad (2.52)$$

$${}_c\tilde{S}_2 = {}_c\tilde{E} {}_c\tilde{E} \quad (2.53)$$

Dessa forma a eq. (2.51) reduz-se a:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}\tilde{W}_c - \int_{B_c} {}^r S_2 \cdot {}_c \tilde{E}_\ell dV_c &= \int_{B_c} \rho_c {}^{r+1}\tilde{u}_c \cdot {}_c \tilde{u} dV_c + \\ &+ \int_{B_c} {}_c \tilde{E}_c \cdot {}_c \tilde{E} dV_c + \int_{B_c} {}^r S_2 \cdot {}_c \tilde{E}_{n\ell} dV_c \end{aligned} \quad (2.54)$$

A equação anterior, que é não-linear nos incrementos de deslocamentos ${}_c \tilde{u}$, corresponde à descrição lagrangiana total da forma incremental do P.T.V.

Uma linearização dessa equação é possível se se assume que as componentes do tensor incremento de deformações ${}_c \tilde{E}$ são pequenas, ou em outras palavras, que se pode confundir as configurações B_r e B_{r+1} . Neste caso pode-se desprezar os termos não-lineares de ${}_c \tilde{E}_{n\ell}$ frente àqueles do tensor ${}_c \tilde{E}_\ell$. Isto implica em se tomar:

$$\begin{aligned} {}_c \tilde{E} &= {}_c \tilde{E}_\ell \\ {}_c \tilde{S}_2 &= {}_c \tilde{E}_c \cdot {}_c \tilde{E}_\ell \end{aligned} \quad (2.55a-b)$$

Assim, a forma linearizada de (2.54) será:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}\tilde{W}_c - \int_{B_c} {}^r S_2 \cdot {}_c \tilde{E}_\ell dV_c &= \int_{B_c} \rho_c {}^{r+1}\tilde{u}_c \cdot {}_c \tilde{u} dV_c + \\ &+ \int_{B_c} {}_c \tilde{E}_c \cdot {}_c \tilde{E}_\ell dV_c + \int_{B_c} {}^r S_2 \cdot {}_c \tilde{E}_{n\ell} dV_c \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.3.1.2. Descrição lagrangiana atualizada

Conforme foi visto na seção (2.2), qualquer configuração pode ser utilizada como uma configuração de referência. Na descrição lagrangiana atualizada, a configuração no instante $t=t_r$

(última configuração conhecida), será tomada como configuração de referência. Fazendo-se uso de (2.39), o P.T.V., neste caso, é escrito como:

$${}^{r+1}\widehat{W}_r = \int_{B_r} \rho_r {}^{r+1}\widehat{u}_r \cdot \widehat{u}_r \, dV_r + \int_{B_r} {}^{r+1}\widehat{S}_2 \cdot {}^{r+1}\widehat{F}_r^T \nabla \widehat{u}_r \, dV_r \quad (2.57)$$

As relações incrementais neste caso, serão:

$${}^{r+1}\underline{x} = \underline{x}_r + \underline{r}u \quad (2.58)$$

$${}^{r+1}\underline{S}_2 = \underline{r}T + \underline{r}S_2 \quad (2.59)$$

onde $\underline{r}u$ é o deslocamento do corpo ao passar de configuração B_r para B_{r+1} , $\underline{r}T$ é o tensor de Cauchy da configuração B_r e $\underline{r}S_2$ é o incremento do tensor de tensões.

De (2.58) e (2.11) o gradiente de deformação de B_r a B_{r+1} é:

$${}^{r+1}\underline{F}_r = \underline{I} + \nabla \underline{r}u \quad (2.60)$$

Usando-se (2.60) e (2.9) o tensor de deformação de Green-Lagrange é expresso por:

$${}^{r+1}\underline{E}_r = \frac{1}{2}(\nabla \underline{r}u + \nabla \underline{r}u^T + \nabla \underline{r}u^T \nabla \underline{r}u) = \underline{r}E \quad (2.61a)$$

que pode ser decomposto numa parte linear e na não-linear segundo:

$$\underline{r}E = \underline{r}E_\ell + \underline{r}E_{n\ell} \quad (2.61b)$$

sendo:

$$\underline{r}E_\ell = \frac{1}{2}(\nabla \underline{r}u + \nabla \underline{r}u^T)$$

$$\underline{r}E_{n\ell} = \frac{1}{2} \nabla \underline{r}u^T \nabla \underline{r}u \quad (2.61c-d)$$

Substituindo-se (2.59) e (2.60) em (2.57) e fazendo-se uso (2.61a-d) obtem-se:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}\widehat{W}_r = & \int_{B_r} \rho_r {}^{r+1}\underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\widehat{u}} \, dV_r + \int_{B_r} {}_r\widetilde{S}_2 \cdot {}_r\widetilde{E} \, dV_r + \\ & + \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_{n\ell} \, dV_r + \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_\ell \, dV_r \end{aligned} \quad (2.62)$$

Observando-se que o tensor incremental ${}_r\widetilde{S}_2$ está relacionado com ${}_r\widetilde{E}$ pela relação:

$${}_r\widetilde{S}_2 = {}_r\widetilde{E} {}_r\widetilde{E} \quad (2.63)$$

a equação (2.62) fica dada por:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}\widehat{W}_r - \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_\ell \, dV_r = & \int_{B_r} \rho_r {}^{r+1}\underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\widehat{u}} \, dV_r + \\ & + \int_{B_r} {}_r\widetilde{E} {}_r\widetilde{E} \cdot {}_r\widetilde{E} \, dV_r + \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_{n\ell} \, dV_r \end{aligned} \quad (2.64)$$

A equação (2.64) corresponde à descrição lagrangiana atualizada da forma incremental do P.T.V. Uma linearização (em termos dos incrementos de deslocamento ${}_r\widetilde{u}$) semelhante àquela efetuada anteriormente é conseguida se se adota:

$$\begin{aligned} {}_r\widetilde{E} &= {}_r\widetilde{E}_\ell \\ {}_r\widetilde{S}_2 &= {}_r\widetilde{E} {}_r\widetilde{E}_\ell \end{aligned} \quad (2.65a-b)$$

obtendo-se assim:

$$\begin{aligned} {}^{r+1}\widehat{W}_r - \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_\ell \, dV_r = & \int_{B_r} \rho_r {}^{r+1}\underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\widehat{u}} \, dV_r + \\ & + \int_{B_r} {}_r\widetilde{E} {}_r\widetilde{E}_\ell \cdot {}_r\widetilde{E}_\ell \, dV_r + \int_{B_r} {}_r\widetilde{T} \cdot {}_r\widetilde{E}_{n\ell} \, dV_r \end{aligned} \quad (2.66)$$

As equações (2.56) ou (2.66) permitem transformar o problema não-linear numa sequência de problemas linearizados.

2.4. Estabilidade Dinâmica

Mostrou-se na seção anterior uma formulação variacional capaz de permitir a obtenção de uma resposta no tempo, isto é, o conhecimento, em cada instante, da configuração apresentada pelo corpo.

Nesta seção supõe-se que esta resposta pode ser obtida, ou seja, $\underline{u}^*(\underline{X}, t)$ satisfazendo o problema proposto no ítem 2.3 é conhecido.

Dessa forma o movimento do corpo fica estabelecido pela relação:

$$\underline{p}_C^* = \underline{x}^* = \underline{X} + \underline{u}^*(\underline{X}, t) \quad (2.67)$$

Este movimento, que será definido como movimento não perturbado, realiza-se para uma combinação de parâmetros do sistema dinâmico. Obviamente, se se modificam alguns ou todos os parâmetros do sistema, obtem-se um novo movimento (movimento perturbado):

$$\underline{p}_C^* = \underline{x}^* = \underline{X} + \underline{u}^*(\underline{X}, t) , \quad (2.68)$$

que diferirá do movimento não perturbado de:

$$\underline{x}^* - \underline{x}^* = \underline{u}^* - \underline{u}^* = \underline{u}(\underline{X}, t) , \quad (2.69)$$

onde $\underline{u}(\underline{X}, t)$ "mede" o afastamento entre esses dois movimentos, causado por alguma perturbação (propagação da perturbação).

Assim, entendendo-se estabilidade no sentido de Liapunov, dir-se-á que: se pequenas perturbações sobre as condições iniciais do movimento causam pequenos desvios em relação ao movi

mento não perturbado e para todo tempo, este movimento \bar{e} está - vel.

Assim de acordo com (2.69) a estabilidade de p_c^* pode ser julgada analisando-se o comportamento de $\underline{u}(\underline{X}, t)$.

2.4.1. Estabilidade segundo Liapunov

Seja:

$$\underline{x}^* = \underline{X} + \underline{u}^*(\underline{X}, t) \quad (2.70)$$

o movimento não perturbado do corpo, e sejam:

$$\underline{x}_0^* = \underline{X} + \underline{u}^*(\underline{X}, t_0)$$

$$\dot{\underline{x}}_0^* = \dot{\underline{u}}^*(\underline{X}, t_0) \quad (2.71a-b)$$

as condições iniciais desse movimento.

Suponha-se que sobre as condições iniciais, sejam dadas perturbações \underline{u}_0 e $\dot{\underline{u}}_0$, isto é:

$$\underline{x}_0^* = \underline{x}_0^* + \underline{u}_0$$

$$\dot{\underline{x}}_0^* = \dot{\underline{x}}_0^* + \dot{\underline{u}}_0 \quad (2.72a-b)$$

e seja:

$$\underline{x}^* = \underline{x}^* + \underline{u}(\underline{X}, t) \quad (2.73)$$

o movimento perturbado.

Diz-se que o movimento p_c^* é estável segundo Liapunov , se:

i) $\exists \gamma$; $\gamma > 0$ e suficientemente pequeno, tal que:

$\forall \underline{u}_0$, $\dot{\underline{u}}_0$ satisfazendo:

$$\|\underline{u}_0\|_0 + \|\dot{\underline{u}}_0\|_0 < \gamma$$

o movimento \underline{p}_C^* é determinado para todo $t > t_0$.

ii) $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists \delta(\varepsilon)$ tal que para:

$$\|\underline{u}_0\|_0 + \|\dot{\underline{u}}_0\|_0 < \delta$$

tem-se:

$$\|\underline{x}^* - \underline{x}^*\|_0 < \varepsilon \quad \text{ou seja} \quad \|\underline{u}\|_0 < \varepsilon$$

para todo $t > t_0$.

iii) O movimento \underline{p}_C^* estável segundo Liapunov é assintoticamente estável, se:

$$\|\underline{u}_0\|_0 < \gamma \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{u}\|_0 \rightarrow 0$$

Nas expressões anteriores $\|\cdot\|_0$ é a norma em L_2 [50]

$$\|\underline{u}\|_0 = \int_{\mathbb{B}_C} \underline{u} \cdot \underline{u} \, dV_C$$

2.4.2. Estabilidade infinitesimal - Forma fraca da equação de perturbação

Em estabilidade infinitesimal, procura-se estudar o comportamento do movimento, na vizinhança de soluções conhecidas.

Dentro deste contexto o conhecimento da equação de perturbação (em termos da variável $\underline{u}(\underline{x}, t)$), é importante, já que nestes casos, ao se assumir que as perturbações são infinitesimais, pode-se, em primeira aproximação, linearizar esta equação, obtendo-se em determinadas situações (conforme se verá nos capítulos III e IV) informações suficientes para o julgamento da esta

bilidade da solução particular.

Seguindo-se a mesma metodologia apresentada nas seções anteriores, o P.T.V. será utilizado para a obtenção de forma fraca da equação de perturbação, sobre a qual soluções aproximadas serão obtidas.

Sejam então \underline{p}_c^* e \underline{p}_c^* (eqs. 2.67 e 2.68) os movimentos não-perturbado e perturbado respectivamente. Uma vez que \underline{p}_c^* e \underline{p}_c^* são movimentos reais do corpo (as condições iniciais são diferentes), os mesmos devem satisfazer a equação do movimento do corpo, e consequentemente ao P.T.V. conforme definido em (2.39).

Dessa forma pode-se escrever que:

$$\hat{W}^* = \int_{B_c} \rho_c \ddot{u}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_c + \int_{B_c} \underline{S}_2^* \cdot \underline{F}^{*T} \nabla \underline{\hat{u}} \, dV_c \quad (2.74)$$

$$\hat{W}^* = \int_{B_c} \rho_c \ddot{u}^* \cdot \underline{\hat{u}} \, dV_c + \int_{B_c} \underline{S}_2^* \cdot \underline{F}^{*T} \nabla \underline{\hat{u}} \, dV_c \quad (2.75)$$

Usando-se agora as relações (ver semelhança com eq.(2.47-2.50)):

$$\underline{u}^* = \underline{u}^* + \underline{u}$$

$$\underline{\ddot{u}}^* = \underline{\ddot{u}}^* + \underline{\ddot{u}}$$

$$\underline{S}_2^* = \underline{S}_2^* + \underline{S}_2$$

$$\underline{F}^* = \underline{F}^* + \nabla \underline{u}$$

$$\underline{E}^* = \underline{E}^* + \underline{E}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_\ell + \underline{E}_{n\ell}$$

$$\underline{E}^* = \frac{1}{2} [\nabla \underline{u}^* + (\nabla \underline{u}^*)^T + (\nabla \underline{u}^*)^T \nabla \underline{u}^*]$$

$$\underline{E}_\ell = \frac{1}{2} [\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + (\nabla \underline{u}^*)^T \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u}^*]$$

$$\underline{E}_{n\ell} = \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u} \quad (2.76a-i)$$

e subtraindo-se (2.74) de (2.75), obtem-se:

$$\begin{aligned} \bar{W}^* - \bar{W}^* = & \int_{B_c} \rho_c \ddot{u} \cdot u \, dV_c + \int_{B_c} \underline{S}_2^* \cdot \underline{\bar{E}}_{n\ell} \, dV_c + \\ & + \int_{B_c} \underline{S}_2 \cdot (\underline{\bar{E}}_\ell + \underline{\bar{E}}_{n\ell}) \, dV_c \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{E}}_\ell &= \frac{1}{2} [\nabla \underline{\hat{u}} + \nabla \underline{\hat{u}}^T + \nabla \underline{u}^* \nabla \underline{\hat{u}} + \nabla \underline{\hat{u}}^T \nabla \underline{u}^*] \\ \underline{\bar{E}}_{n\ell} &= \frac{1}{2} [\nabla \underline{u}^T \nabla \underline{\hat{u}} + \nabla \underline{\hat{u}}^T \nabla \underline{u}] \end{aligned} \quad (2.78a-b)$$

Assumindo-se que as perturbações são pequenas, isto é:

$$\underline{u} \ll \underline{u}^* \quad (2.79)$$

e conseqüentemente, que o estado de deformação e de tensão do corpo, no movimento perturbado, difere pouco daquele no movimento não perturbado, pode-se escrever:

$$\underline{S}_2^* = \underline{S}_2^* + \underline{E} \underline{E}_\ell \quad (\text{ver eq. 2.52}) \quad (2.80)$$

Substituindo-se essa relação em (2.77) e desprezando-se os termos quadráticos em \underline{u} , obtem-se:

$$\bar{W}^* - \bar{W}^* = \int_{B_c} \rho_c \ddot{u} \cdot u \, dV_c + \int_{B_c} \underline{S}_2^* \cdot \underline{\bar{E}}_{n\ell} \, dV_c + \int_{B_c} \underline{E} \underline{E}_\ell \cdot \underline{\bar{E}}_\ell \, dV_c \quad (2.81)$$

A equação (2.81) fornece a forma variacional (forma fraca) da equação de perturbação, para o problema de estabilidade infinitesimal de sistemas elásticos.

Assim, o estudo do comportamento da propagação da perturbação $\underline{u}(\underline{x}, t)$, satisfazendo (2.81), será utilizado para a análise

se da estabilidade de $\underline{u}^*(\underline{x}, t)$ solução do problema não-linear, conforme se verá no capítulo IV.

CAPÍTULO III

DINÂMICA DE TUBOS COM ESCOAMENTO INTERNO

3.1. Introdução

No capítulo anterior apresentaram-se formulações para a análise dinâmica de corpos elásticos, quer do ponto de vista da resposta, quer do ponto de vista da estabilidade de um movimento conhecido. Neste capítulo as formulações gerais apresentadas anteriormente serão aplicadas a um problema específico.

A aplicação dessas formulações a um problema real requer hipóteses, visando permitir a obtenção de soluções utilizáveis na prática. Obviamente a aplicabilidade dessas hipóteses dependerá do grau de precisão que se exige para o modelo, o qual deve representar satisfatoriamente o problema que se pretende resolver.

Assim, neste capítulo, procura-se inicialmente estabelecer um modelo que permita analisar o efeito do escoamento de um fluido no interior de um tubo, sobre os movimentos transversais deste tubo. Definido este modelo deduz-se a forma incremental para o estudo da resposta dinâmica não-linear e estabelece-se também a equação de perturbação para a análise da estabilidade infinitesimal de uma solução conhecida. Posteriormente, o problema de vibrações lineares em torno da posição trivial de equilíbrio é discutido e algumas conclusões são apresentadas.

3.2. Um Modelo Mecânico

Admite-se que o escoamento do fluido no interior do tubo se processa indefinidamente. Dessa forma, o modelo físico do problema exige a existência de um reservatório de capacidade il

mitada, para suprir continuamente fluido, e uma descarga também ilimitada, saindo constantemente na outra extremidade do tubo. Portanto, se se considera como sistema o conjunto tubo + fluido sua energia seria infinita.

Assim, o problema que se coloca é: como analisar o comportamento do tubo, cumprindo com as exigências físicas do modelo? Neste ponto convém observar que a ação do fluido sobre o tubo sô se dá para aquelas partículas de fluido que momentanea - mente estão em contato direto com este, pois nenhuma força pode ser transmitida de volta ao tubo pelo jato, depois dele ter abandonado o tubo, nem pelo fluido que ainda não penetrou.

Por outro lado, a cada instante diferentes partículas ocupam o interior do tubo, ou seja o sistema (tubo + fluido interno) não é fechado. Isso exige que as características do escoamento sejam previamente conhecidas e controladas externamente (p.ex. vazão de entrada e pressão de saída).

As idéias anteriormente estabelecidas conduzem a formular o problema usando o princípio dos trabalhos virtuais, considerando o tubo como o corpo e entendendo o efeito de escoamento do fluido no interior do tubo, como uma ação externa, proveniente das forças de contato desenvolvidas entre o fluido e as paredes do tubo.

Para o estudo que se pretende realizar, será utilizado um modelo unidimensional, analisando-se o tubo de acordo com as hipóteses clássicas da teoria de vigas, e supondo-se que o fluido é incompressível, não-viscoso, que as variações radiais na velocidade de escoamento são desprezíveis, e, finalmente, que os movimentos do tubo não alteram as características do fluxo.

As hipóteses anteriormente admitidas são aceitáveis no caso de tubos de pequeno diâmetro, em comparação com o seu comprimento.

Para a descrição do movimento do tubo vai se eleger uma base cartesiana fixa $\{\underline{e}_i\}$; $i=1,2,3$ (referencial inercial), de forma tal que a reta suporte de \underline{e}_1 coincide com o eixo do tubo na configuração indeformada (fig. 3.1).

Considera-se que nesta configuração o tubo está livre de tensões, é uniforme, tem comprimento L , e que o material é elástico linear e isotrópico com módulo de elasticidade E e que a densidade é μ .

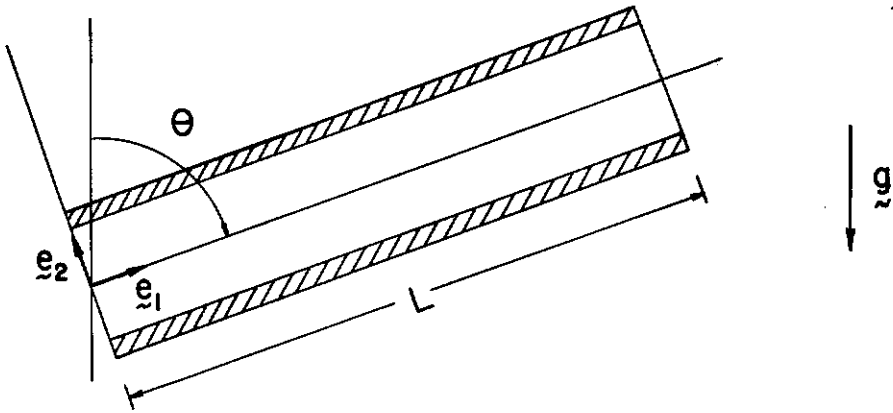


Fig. 3.1 - Configuração indeformada do tubo

No sistema de coordenadas adotado, a descrição referencial do princípio dos trabalhos virtuais (eq. 2.42) é expressa por:

$$\bar{W} = \int_{B_c} \mu \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i dV_c + \int_{B_c} S_{ij} \cdot \bar{E}_{ij} dV_c \quad i,j=1,2,3 \quad (3.1)$$

onde a configuração de referência B_c , corresponde à configura-

ção indeformada do tubo. \ddot{u}_i são as componentes na base $\{\underline{e}_i\}$ da aceleração de um ponto do corpo, S_{ij} e E_{ij} representam respectivamente as componentes, na base $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$, do tensor de tensões de Piolla-Kirchoff de segunda espécie, e as componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange. O símbolo \otimes denota produto tensorial e está se assumindo a convenção de somação sobre índices repetidos.

3.2.1. Teoria de Vigas Flexíveis - Pequenas Deformações

Seguindo-se o procedimento comum da teoria de vigas flexíveis, assume-se que:

1) as componentes do tensor de tensões T_{22} , T_{33} e T_{23} são suficientemente pequenas de forma que podem ser desprezadas em comparação com as componentes restantes, isto é:

$$S_{22} = S_{33} = S_{23} = 0 \quad (3.2)$$

2) as hipóteses de Bernoulli são válidas, isto é:

i) seções transversais planas, normais ao eixo indeformado, permanecem planas após a deformação.

ii) as normais ao eixo indeformado permanecem normais a este depois de deformado.

iii) não se consideram deformações no plano destas seções.

Assim como as relações (3.2) vão impor restrições sobre as equações constitutivas, as hipóteses (i) a (iii) vão impor restrições sobre o campo de deslocamentos cinematicamente admissível.

3.2.2. Relações Cinemáticas

Nas deduções que se seguem assume-se que a flexão do tubo ocorre exclusivamente num plano paralelo a $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ (Fig.3.2).

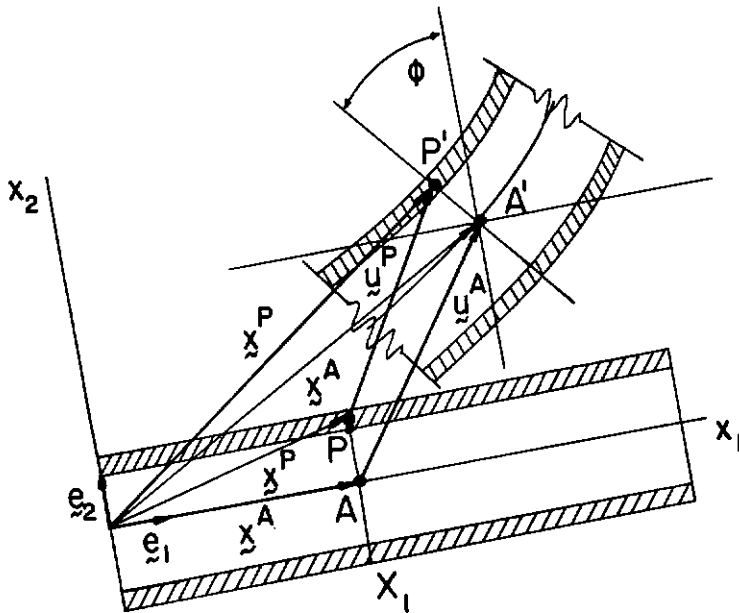


Fig. 3.2 - Hipóteses sobre o movimento do tubo

Seja então um ponto A situado sobre o eixo do tubo.

De acordo com (2.10) escreve-se:

$$\underline{\tilde{x}}^A = \underline{\tilde{x}}^A + \underline{\tilde{u}}^A$$

$$\underline{\tilde{u}}^A = \underline{\tilde{u}}(\underline{\tilde{x}}^A, t)$$

$$\underline{\tilde{x}}^A = x_1 \underline{e}_1$$

$$\underline{\tilde{u}}^A = u_1(x_1, t) \underline{e}_1 + u_2(x_1, t) \underline{e}_2 \quad (3.3a-d)$$

De forma semelhante para um ponto P qualquer do tubo situado na seção transversal $x_1 = \text{constante}$, ter-se-á:

$$\underline{\tilde{x}}^P = \underline{\tilde{x}}^P + \underline{\tilde{u}}^P$$

$$\underline{\tilde{u}}^P = \underline{\tilde{u}}(\underline{\tilde{x}}^P, t)$$

$$\underline{\tilde{x}}^P = \underline{\tilde{x}}_i \underline{e}_i \quad (3.4a-c)$$

A partir das hipóteses (i) e (ii), pode-se escrever:

$$\underline{x}^P - \underline{x}^A = \underline{Q}(\underline{x}^P - \underline{x}^A) \quad (3.5)$$

onde \underline{Q} é um tensor ortogonal, que representa uma rotação em torno de \underline{e}_3 , cujas componentes serão:

$$[\underline{Q}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A equação (3.5) permite determinar as coordenadas dos pontos pertencentes a uma dada seção transversal, em termos das coordenadas do ponto coincidente com o eixo do tubo, e do giro dessa seção, que é caracterizado pela função $\phi = \phi(X_1, t)$.

3.2.3. Deslocamento, Velocidade e Aceleração

- Deslocamento

Se se utilizam as relações (3.3), (3.4) e (3.5), obtém-se:

$$\underline{u}^P = \underline{u}^A + (\underline{Q} - \underline{I})(\underline{x}^P - \underline{x}^A) \quad (3.7)$$

onde \underline{I} é o tensor identidade.

No sistema de coordenadas adotado, tem-se que:

$$\underline{I} = \delta_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j), \text{ onde } \delta_{ij} \text{ é o delta de Kronecker}$$

e portanto:

$$\underline{u}^P = (u_1 - X_2 \sin \phi) \underline{e}_1 + [u_2 + X_2 (\cos \phi - 1)] \underline{e}_2 \quad (3.8)$$

- Velocidade e aceleração

A partir de (3.4a) e de (3.8) a velocidade e a acelera

ção do ponto P são dadas respectivamente por:

$$\dot{\underline{u}}^P = (\dot{u}_1 - X_2 \cos \phi \dot{\phi}) \underline{e}_1 + (\dot{u}_2 - X_2 \sin \phi \dot{\phi}) \underline{e}_2$$

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}^P = & (\ddot{u}_1 + X_2 \sin \phi \dot{\phi}^2 - X_2 \cos \phi \ddot{\phi}) \underline{e}_1 + (\ddot{u}_2 - X_2 \cos \phi \dot{\phi}^2 - \\ & - X_2 \sin \phi \ddot{\phi}) \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (3.9a-b)$$

- Deslocamento virtual

Da definição de deslocamento virtual (eq. 2.20b) conclui-se que as condições impostas pelas hipóteses de Euler - Bernoulli sobre o campo de deslocamentos cinematicamente admissível (eq. 3.8) têm que ser também satisfeitas pelo campo de deslocamentos virtuais, e portanto:

$$\underline{\hat{u}}^P = (\hat{u}_1 - X_2 \cos \phi \hat{\phi}) \underline{e}_1 + (\hat{u}_2 - X_2 \sin \phi \hat{\phi}) \underline{e}_2 \quad (3.10)$$

3.2.4. Deformação

- Gradiente de deformação

De acordo com a definição do gradiente de deformação (eq. 2.8a), tem-se:

$$d\underline{x}^P = \underline{F} d\underline{X}^P ; \underline{F} = \underline{\Pi} + \nabla \underline{u}^P \quad (3.11)$$

e portanto:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 + u_1' - X_2 \cos \phi \phi' & -\sin \phi & 0 \\ u_2' - X_2 \sin \phi \phi' & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde ()' denota $\partial() / \partial X_1$.

- Tensor de deformação de Green-Lagrange

O conhecimento de \underline{F} , permite avaliar diretamente as com

ponentes de \underline{E} na base $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$. Assim, de acordo com (2.9)

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) \quad (3.13)$$

cujas componentes não nulas, são:

$$\begin{aligned} E_{11} = & u_1' (1 + \frac{1}{2} u_1') + \frac{1}{2} u_2'^2 - X_2 (1 + u_1') \cos \phi \phi' - \\ & - X_2 u_2' \sin \phi \phi' + \frac{1}{2} X_2 \phi'^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} E_{12} = E_{21} = & \frac{1}{2} [-(1 + u_1' - X_2 \cos \phi \phi') \sin \phi + \\ & + (u_2' - X_2 \sin \phi \phi') \cos \phi] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se se utiliza agora a hipótese (ii) da seção 3.2.1 , tem-se:

$$E_{12} = E_{21} = 0$$

e de (3.15), vem:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{u_2'}{1 + u_1'} \quad (3.16)$$

Impondo-se finalmente as condições de que as deformações sejam pequenas, e os giros moderados, isto é:

$$\begin{aligned} u_1' & \approx 0(u_2')^2 \ll 1 \\ \operatorname{tg} \phi & \approx \phi ; \sin \phi \approx \phi ; \cos \phi \approx 1 \end{aligned} \quad (3.18a-b)$$

Obtem-se:

$$\phi \approx u_2' \quad (3.19)$$

$$E_{11} \approx u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2 - X_2 u_2'' \quad (3.20)$$

3.2.5. Equação Constitutiva

De acordo com as deduções anteriores E_{11} é a única componente não nula do tensor de deformações \underline{E} . E como se está considerando que o material é Hookeano e isotrópico, a equação constitutiva relevante ao problema, será:

$$S_{11} = E E_{11} \quad (3.21)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

3.2.6. Trabalho Virtual das Forças Externas

O sistema de forças externas a ser considerado, inclui forças de massa, provenientes do peso próprio do tubo, e forças de superfície, que neste caso estarão associadas às ações geradas pelo escoamento do fluido. Assim, de acordo com (2.35) escreve-se:

$$\bar{W} = \int_{B_c} \mu \underline{b} \cdot \underline{\bar{u}} dV_c + \int_{B_c} \underline{\bar{\Delta}}^* \cdot \underline{\bar{u}} dA_c \quad (3.22)$$

- Trabalho virtual das forças de massa

O trabalho virtual \bar{W}_1 das forças devidas ao peso próprio do tubo é facilmente calculado. Assim, definindo-se:

$$\underline{b} = -g \cos \theta \underline{e}_1 - g \sin \theta \underline{e}_2,$$

onde g é a aceleração da gravidade, obtem-se:

$$\bar{W}_1 = \int_0^L -\mu A g (\cos \theta \bar{u}_1 + \sin \theta \bar{u}_2) dX_1 \quad (3.23)$$

- Trabalho virtual das forças de superfície

Para o cálculo do trabalho virtual \bar{W}_2 , das forças externas associadas ao escoamento do fluido, deve-se notar que a

ação do fluido sobre o tubo provem das forças de contato desenvolvidas entre eles. A determinação dessas forças é feita com base nas hipóteses simplificadoras, apresentadas na introdução deste capítulo, sobre o tipo de escoamento a ser considerado. Assim, ao se assumir que o fluido é incompressível e que o diâmetro do tubo é pequeno em comparação com o seu comprimento, pode-se admitir que as variações radiais na velocidade de escoamento são desprezíveis, ou seja, que do ponto de vista prático, o efeito do escoamento do fluido sobre o tubo depende basicamente do fluxo médio, que é considerado como um conjunto de partículas movendo-se tangencialmente ao tubo com velocidade conhecida (fig. 3.3).

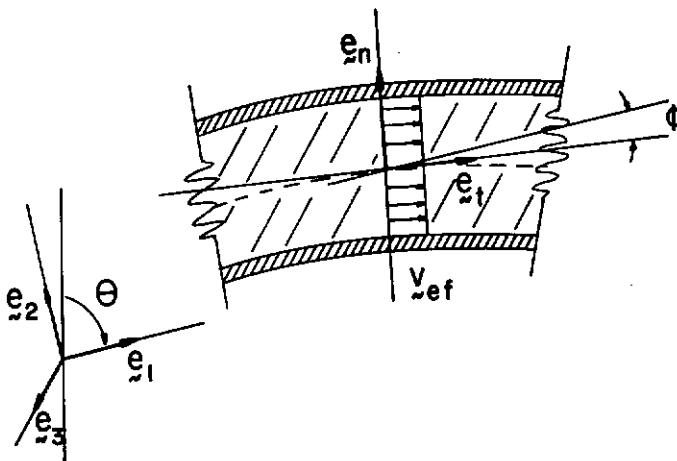


Fig. 3.3 - Hipóteses sobre o escoamento do fluido

Se se define:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{Q(t)}{A_f} \quad (3.24)$$

onde $Q(t)$ é a vazão de entrada e A_f é a área interna da seção transversal do tubo, da condição imposta, de se ter um escoamento incompressível, e de que a seção transversal não se modifica com os movimentos do tubo (hipóteses (2) - Seção 3.2.1), a velo

cidade de escoamento (velocidade do fluido em relação à região do espaço ocupado pelo tubo) \vec{v} é:

$$\vec{v}_{ef} = \dot{\xi}(t) \vec{e}_t, \quad (3.25)$$

onde \vec{e}_t , \vec{e}_n e \vec{e}_z (fig. 3.3) são os vetores unitários tangente, normal e binormal, associados à coordenada curvilínea s , definida sobre o eixo do tubo na configuração deformada.

Com base nas simplificações impostas sobre o escoamento do fluido, é possível escrever a equação da conservação da quantidade de movimento linear, para um volume elementar de fluido (fig. 3.4), supondo-se que o seu centro de massa coincide com um ponto do eixo do tubo. Isso corresponde a formular as condições de equilíbrio dinâmico, entendendo-se esse elemento de fluido como uma partícula de massa

$$dm = \rho A_f ds \quad (3.26)$$

localizada no centro de massa (ρ é a densidade).

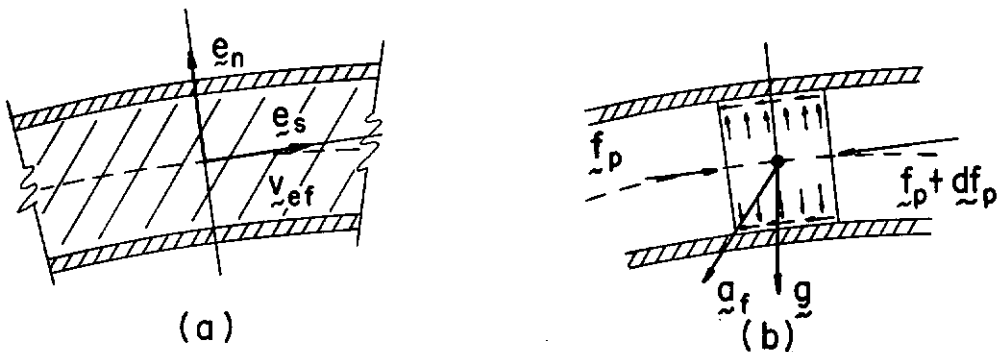


Fig. 3.4 - Equilíbrio de forças num elemento de fluido

Assim, a partir de (2.16c), escreve-se:

$$\underline{dR} = \underline{a}_f \, dm \quad (3.27)$$

onde \underline{a}_f é a aceleração absoluta (referencial inercial) do centro de massa, e \underline{dR} representa a resultante das forças que atuam sobre o elemento de fluido. Tem-se, assim:

i) força de massa, cuja resultante é:

$$\underline{df}_m = \rho A_f \, \underline{g} \, ds \quad (3.28)$$

ii) forças devidas ao fluido à esquerda e à direita do volume isolado.

Na seção à esquerda a força atuante será:

$$\underline{f}_p = \int_{A_f} p \, \underline{\Pi} \, \underline{e}_t \, dA = p A_f \, \underline{e}_t, \quad (3.29)$$

onde $p = p(s,t)$ é a pressão do fluido medida em relação à pressão atmosférica.

Na seção à direita, ter-se-á uma força $-(\underline{f}_p + \underline{df}_p)$, conduzindo a uma resultante; atuando no elemento de fluido, dada por:

$$\underline{df}_p = A_f (p_{,s} \, \underline{e}_t + p \phi_{,s} \, \underline{e}_n) ds, \quad (3.30)$$

onde $(\quad)_{,s} = \partial(\quad)/\partial s$, e ϕ está definido conforme mostrado na figura (3.3).

iii) forças de contato, representando a ação das paredes do tubo sobre o elemento de fluido, cuja resultante \underline{df}_c se quer determinar.

A partir de (3.27), \underline{df}_c fica dado por:

$$\underline{df}_c = [\rho(\underline{a}_f - \underline{g}) + (p_{,s} \underline{e}_t + p \phi_{,s} \underline{e}_n)] A_f ds, \quad (3.31)$$

restando, portanto, avaliar a aceleração \underline{a}_f , para se conhecer a expressão de \underline{df}_c .

Pela forma como foi deduzida, a eq. (3.31) admite a possibilidade de existência de atrito entre o fluido e as paredes do tubo; a força de atrito sendo representada pela componente tangencial de \underline{df}_c . Como se verá posteriormente a condição de que o fluido seja invíscido será imposta anulando-se a componente tangencial dessa força.

A velocidade absoluta do centro de massa \tilde{e} calculada usando-se a expressão

$$\underline{v}_f = \underline{v}_a + \underline{v}_{ef} \quad (3.32)$$

onde \underline{v}_{ef} é a velocidade de escoamento (eq. 3.25), e \underline{v}_a representa a velocidade de arraste devida exclusivamente à flexão do tubo e sua expressão é:

$$\underline{v}_a = - \int_0^{X_1} u_{2,\zeta} \dot{u}_{2,\zeta} d\zeta \underline{e}_1 + \dot{u}_2 \underline{e}_2 \quad (3.33)$$

onde o primeiro termo de (3.33) foi obtido tendo-se em mente que a parcela de deslocamento do eixo do tubo na direção \underline{e}_1 devida apenas à flexão satisfaz a relação:

$$(u_1)_{\text{flexão}} = - \int_0^{X_1} \frac{1}{2} (u_{2,\zeta})^2 d\zeta \quad (3.34)$$

De forma semelhante a aceleração absoluta do centro de massa pode ser obtida a partir de:

$$\underline{a}_f = \underline{a}_a + \underline{a}_c + \underline{a}_{ef} \quad (3.35)$$

onde: \underline{a}_a representa a aceleração de arraste, \underline{a}_c corresponde à aceleração de Coriolis e \underline{a}_{ef} define a componente da aceleração associada ao escoamento do fluido.

- Aceleração de arraste

$$\underline{a}_a = - \int_0^{X_1} [(\dot{u}_{2,\zeta})^2 + \ddot{u}_{2,\zeta} u_{2,\zeta}] d\zeta \underline{e}_1 + \ddot{u}_2 \underline{e}_2 \quad (3.36)$$

- Aceleração de Coriolis

Calculada a partir da expressão:

$$\underline{a}_c = 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{v}_{ef} \quad (3.37)$$

onde:

$$\underline{\Omega} = \dot{\phi} \underline{e}_3 \quad (3.38)$$

representa a velocidade de rotação da seção do tubo.

Assim, utilizando-se a equação (3.25), vem:

$$\underline{a}_c = 2 \dot{\xi} \dot{\phi} \underline{e}_n \quad (3.39)$$

- Aceleração devida ao escoamento

$$\underline{a}_{ef} = \ddot{\xi} \underline{e}_t + \dot{\xi}^2 \phi_{,s} \underline{e}_n \quad (3.40)$$

Conhecida a expressão da aceleração absoluta do fluido (eqs. 3.35-3.40), e portanto o valor de \underline{df}_c (eq. 3.31), o trabalho virtual das forças devidas ao fluido é obtido computando-se o trabalho virtual total efetuado por todos os elementos de fluido que se encontram momentaneamente no interior do tubo, ou seja:

$$\underline{W}_2 = \int_S -\underline{df}_c \cdot \underline{\hat{u}} = \int_S [\rho(\underline{g} - \underline{a}_f) - (p_{,s} \underline{e}_t + p \phi_{,s} \underline{e}_n)] \cdot \underline{\hat{u}} A_f ds \quad (3.41)$$

Se se observa agora que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \frac{dX_1}{ds}$$

$$; ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \quad (3.42a-c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial X_1} \frac{dX_1}{ds}$$

e tendo-se em vista as relações (3.11)

$$dx_1 = (1+u_1')dX_1 ; dx_2 = u_2' dX_1 \quad (3.43a-b)$$

e mantendo-se coerência com as aproximações (3.18a-b), ou seja:

$$u_1' \ll 1 ; u_2'^2 \ll 1 ; \sin \phi \approx \phi ; \cos \phi \approx 1 ; \phi \approx u_2'$$

chega-se a:

$$ds \approx dX_1 ; \frac{\partial \phi}{\partial s} \approx u_2'' ; \frac{\partial p}{\partial s} \approx p' \quad (3.44a-c)$$

A substituição das expressões acima obtidas em (3.41), conduz a:

$$\begin{aligned} \bar{W}_2 = & \int_0^L \left\{ -\rho A_f g (\cos \theta \bar{u}_1 + \sin \theta \bar{u}_2) - \rho A_f \left[\int_0^{X_1} [(\dot{u}_{2,\zeta})^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ddot{u}_{2,\zeta} u_{2,\zeta} \right] d\zeta - 2\dot{\xi} \dot{u}_2' u_2' - \dot{\xi}^2 u_2'' u_2' + \ddot{\xi} \right\} \bar{u}_1 - \rho A_f (\ddot{u}_2 + \\ & + 2\dot{\xi} \dot{u}_2' + \dot{\xi}^2 u_2'' + \ddot{\xi} u_2') \bar{u}_2 - A_f (p' - p u_2'' u_2') \bar{u}_1 - A_f (p' u_2' + \\ & + p u_2'') \bar{u}_2 \} dX_1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

E portanto usando-se (3.22), (3.23) e (3.45), escreve-se:

$$\bar{W} = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 \quad (3.46)$$

3.3. Equações do Movimento

Com as expressões deduzidas na seção anterior é possível obter-se agora a expressão de P.T.V. (eq. 3.1) para o pro -

blema que se está analisando. O trabalho virtual das forças externas já foi calculado no ítem anterior e está dado em (3.46). Resta, portanto, avaliar as integrais que ocorrem no lado direito da equação (3.1).

Assim, para a primeira integral tem-se, de acordo com (3.9) e (3.10):

$$\int_{B_C} \mu \ddot{u}_i \hat{u}_i dV_C = \int_0^L [\mu A (\ddot{u}_1 \hat{u}_1 + \ddot{u}_2 \hat{u}_2) + \mu I \ddot{\phi} \hat{\phi}] dX_1 \quad (3.47a)$$

onde A e I são, respectivamente, a área e o momento de inércia (referido ao centróide) da seção transversal do tubo.

O último termo que aparece em (3.47a) está associado às forças de inércia devidas à rotação da seção transversal do tubo. E uma vez que se está admitindo que o diâmetro deste é pequeno em comparação com o seu comprimento, esse termo pode ser desprezado frente aos dois primeiros, obtendo-se:

$$\int_{B_C} \mu \ddot{u}_i \hat{u}_i dV_C = \int_0^L \mu A (\ddot{u}_1 \hat{u}_1 + \ddot{u}_2 \hat{u}_2) dX_1 \quad (3.47b)$$

A segunda integral de (3.1) reduz-se a:

$$\int_{B_C} S_{ij} \hat{E}_{ij} dV_C = \int_{B_C} S_{11} \hat{E}_{11} dV_C$$

e observando-se (3.20) e (3.21), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{B_C} S_{11} \hat{E}_{11} dV_C = \int_0^L \{ EA (u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2) (\hat{u}_1' + u_2' \hat{u}_2') + \\ + EI u_2'' \hat{u}_2'' \} dX_1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Grupando-se estas relações obtem-se, finalmente:

$$\begin{aligned} & \bar{W} - \int_0^L \mu A (\ddot{u}_1 \bar{u}_1 + \ddot{u}_2 \bar{u}_2) dX_1 - \int_0^L \left\{ EA (u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2) (\bar{u}_1' + u_2' \bar{u}_2') \right\} dX_1 \\ & - \int_0^L EI u_2'' \bar{u}_2'' dX_1 = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{V}}; \quad \bar{u} = [\bar{u}_1 \bar{u}_2]^T \end{aligned} \quad (3.49a)$$

que corresponde à forma fraca das equações do movimento. O espaço das funções cinematicamente admissíveis é definido como:

$$\bar{\mathcal{V}} = H^1[0, L] \times H^2[0, L] \quad (3.49b)$$

onde \times denota produto cartesiano e H^1 e H^2 são espaços de Sobolev [50].

- Condições de contorno

Embora em todo o desenvolvimento anterior não tenham sido especificadas as condições de contorno, a formulação variacional conduz automaticamente à obtenção da forma geral dessas condições, e que para este problema são:

$$\begin{aligned} EA(u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2) \Big|_0^L &= N^*(t) & \text{ou} & \quad u_1 \Big|_0^L = u_1^*(t) \\ \{-EI u_2''' + EA u_2'(u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2)\} \Big|_0^L &= V^*(t) & \text{ou} & \quad u_2 \Big|_0^L = u_2^*(t) \\ EI u_2'' \Big|_0^L &= M^*(t) & \text{ou} & \quad u_2' \Big|_0^L = u_2^{*'}(t) \end{aligned} \quad (3.50a-c)$$

onde N^* , V^* e M^* são, respectivamente, o esforço normal, o cortante e o momento fletor; u_1^* , u_2^* são as componentes do deslocamento do eixo do tubo e $u_2^{*'}$ é a rotação da seção de apoio.

- Condições iniciais

As condições iniciais são impostas em termos de deslocamento e velocidade. Assim:

$$\underline{u}(X_1, 0) = \underline{u}_0(X_1)$$

$$\dot{\underline{u}}(X_1, 0) = \dot{\underline{u}}_0(X_1) \quad (3.51a-b)$$

As equações de Euler-Lagrange associadas a (3.49) correspondem por sua vez à forma forte (forma diferencial) das equações do movimento. Sua expressão é:

$$\begin{aligned} & \mu A \ddot{u}_1 - EA(u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2)' + \mu A g \cos \theta + A_f(p' - \rho u_2'' u_2') + \\ & + \rho A_f \left[g \cos \theta - \int_0^{X_1} [(\dot{u}_{2,\zeta})^2 + u_{2,\zeta} \ddot{u}_{2,\zeta}] d\zeta - \right. \\ & \left. - 2\dot{\xi} \dot{u}_2' u_2' - \dot{\xi}^2 u_2'' u_2' + \ddot{\xi} \right] = 0 \\ & \mu A \ddot{u}_2 - EA[u_2'(u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2)]' + EI u_2'''' + A_f(\rho u_2')' + \\ & + \rho A_f(\ddot{u}_2 + 2\dot{\xi} \dot{u}_2' + \dot{\xi}^2 u_2'' + \ddot{\xi} u_2') = -(\mu A + \rho A_f) g \sin \theta \quad (3.52a-b) \end{aligned}$$

3.4. Resposta Dinâmica Não-Linear - Forma Incremental

As deduções mostradas no capítulo anterior conduziram a equações de movimento não-lineares, restritas à hipótese de giros moderados. É possível, utilizando a forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, tratar de forma adequada situações de grandes deslocamentos e grandes rotações.

Adotando-se a descrição lagrangiana atualizada, onde a cada instante as coordenadas são "corrigidas", automaticamente já se está levando em consideração a condição de que o escoamento é sempre tangencial. Além disso, como em cada incremento os deslocamentos e deformações são tomados suficientemente pequenos, as mesmas hipóteses utilizadas no capítulo anterior para a formulação do problema, permanecem válidas.

Conforme foi visto no capítulo II - Seção 2.3.1.2, para a aplicação da descrição lagrangiana atualizada, da forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, é necessário definir a cada instante uma nova configuração de referência, que coincide com a última configuração conhecida no movimento do corpo (fig. 3.5a). Assim, é conveniente trabalhar-se com o sistema de coordenadas intrínseco (\underline{e}_s , \underline{e}_n) definido sobre o eixo do tubo. Entretanto, no procedimento que se vai adotar, a "curva", correspondente à configuração conhecida do eixo do tubo, será aproximada por segmentos de reta (fig. 3.5b).

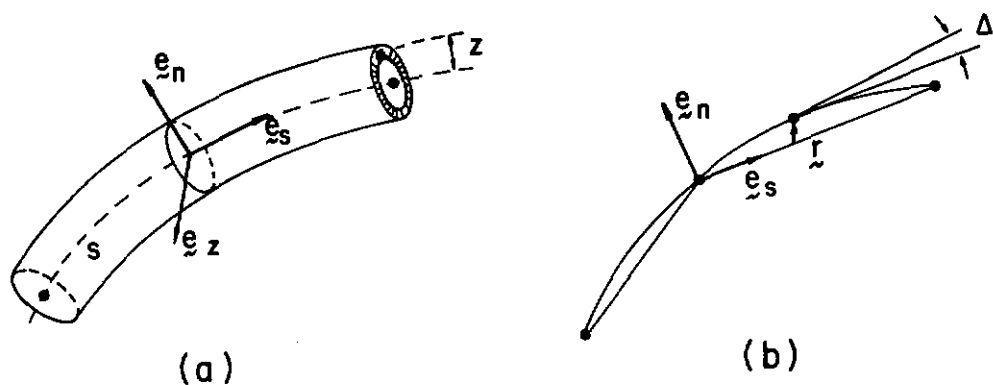


Fig. 3.5 - Configuração de referência adotada

Isso permite utilizar, para cada trecho reto, a mesma expressão já deduzida anteriormente (eq. 3.20), para representar no sistema cartesiano local (\underline{e}_s , \underline{e}_n) os incrementos de deformação.

O erro cometido nessa aproximação, devido à deformação fictícia introduzida ao se confundir as duas configurações, pode ser estimado a partir da definição de \underline{F} (eq. 3.11). Nestes

tema local, \underline{F} pode ser decomposto segundo:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{s,s} & -\text{sen } \Delta & 0 \\ r_{n,s} & -(1-\cos\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Se $\|\underline{r}\| \approx 0(\epsilon) ; \epsilon \ll 1 \rightarrow \underline{F} = \underline{\Pi} + 0(\epsilon)$

Assim, se $\|\underline{r}\| \rightarrow 0 ; \underline{F} \rightarrow \underline{\Pi}$, o que significa dizer que o erro será tanto menor quanto mais a curva se aproxime da secante em cada trecho, ou em outras palavras, quanto mais elementos retos sejam usados para aproximar a configuração real.

3.4.1. Forma Incremental do P.T.V.

Nas deduções que se seguem consideram-se que as hipóteses de Euler-Bernoulli (seção 3.2.1) continuam válidas. E seguindo-se o procedimento descrito no capítulo II - Seção 2.3.1.2, a configuração \mathbb{B}_{r+1} que se pretende alcançar vai ser referida à configuração \mathbb{B}_r conhecida.

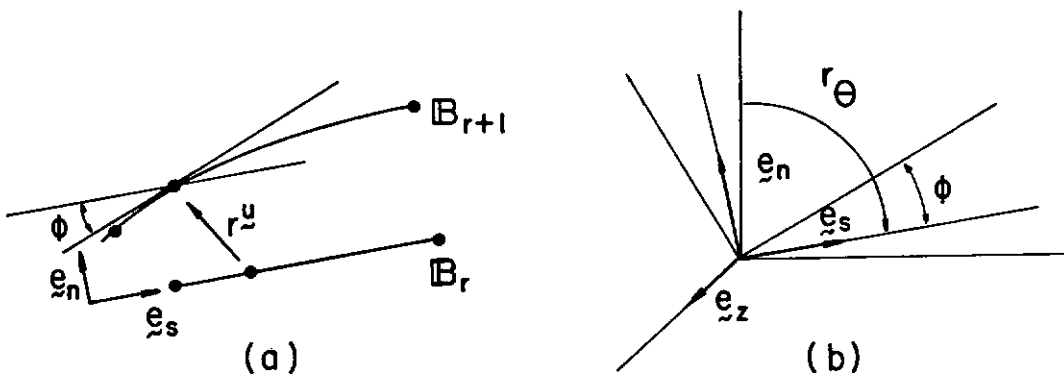


Fig. 3.6 - Descrição lagrangiana atualizada

Para cada elemento reto (fig. 3.6), escreve-se o incremento de deslocamento e a aceleração de um ponto de eixo do tubo como:

$$\tilde{r}^u = \dot{u}_s \underline{e}_s + u_n \underline{e}_n \quad (3.54)$$

$$\tilde{r}^{+1}\ddot{u} = \tilde{r}^{+1}\ddot{u}_s \underline{e}_s + \tilde{r}^{+1}\ddot{u}_n \underline{e}_n \quad (3.55)$$

E uma vez que está se admitindo que as configurações B_r e B_{r+1} são próximas, o incremento de deformação é calculado aproximadamente utilizando-se a eq. (3.20), isto é:

$$\tilde{r}^{E_{ss}} \approx u_{s,s} + \frac{1}{2} (u_{n,s})^2 - z u_{n,ss} \quad (3.56)$$

onde a parte linear e não linear de (3.56) são, respectivamente:

$$(\tilde{r}^{E_{ss}})_\ell = u_{s,s} - z u_{n,ss}^2$$

$$(\tilde{r}^{E_{ss}})_{n\ell} = \frac{1}{2} u_{n,s}^2 \quad (3.57a-b)$$

A partir de (2.65a-b) e tendo em vista (3.21) a equação constitutiva incremental fica sendo:

$$\tilde{r}^{S_{ss}} = E(\tilde{r}^{E_{ss}})_\ell \quad (3.58)$$

Particularizando-se agora a equação (2.66), para este problema, e efetuando-se as integrações na seção transversal, de forma semelhante ao que foi feito nas seções (3.2) e (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^{+1}Q - \int_s^{\tilde{r}^N} \tilde{u}_{s,s} ds + \int_s^{\tilde{r}^M} \tilde{u}_{n,ss} ds = \int_s^{\tilde{r}^N} \mu A (\tilde{r}^{+1}\ddot{u}_s \tilde{u}_s + \\ + \tilde{r}^{+1}\ddot{u}_n \tilde{u}_n) ds + \int_s^{\tilde{r}^N} (E A u_{s,s} \tilde{u}_{s,s} + E I u_{n,ss} \tilde{u}_{n,ss}) ds + \\ + \int_s^{\tilde{r}^N} \tilde{u}_{n,s} ds \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde r_N e r_M podem ser interpretados como o esforço normal e o momento fletor que atuam na configuração B_r . Formalmente, escreve-se:

$$r_N = \int_A r_{T_{ss}} dA ; r_M = \int_A r_{T_{ss}} z dA \quad (3.60a-b)$$

sendo r_T o tensor de Cauchy da configuração B_r .

O trabalho virtual das forças externas que atuam no tubo, pode ser obtido utilizando-se as relações (3.23) e (3.45), e sua expressão já linearizada é:

$$\begin{aligned} r_{rN}^{+1} = & - \int_s \mu A g (\cos^r \theta \hat{u}_s + \sin^r \theta \hat{u}_n) ds - \int_s \rho A_f g (\cos^r \theta \hat{u}_s + \\ & + \sin^r \theta \hat{u}_n) ds - \int_s A_f (\rho \ddot{\xi} + p_{,s}) \hat{u}_s ds - \int_s \rho A_f (r_{r\ddot{u}}^{+1} + \\ & + 2\dot{\xi} r_{r\dot{u}}^{+1} + \dot{\xi}^2 u_{n,ss} + \ddot{\xi} u_{n,s}) \hat{u}_n ds - \int_s A_f (p_{,s} u_{n,s} + \\ & + p u_{n,ss}) \hat{u}_n ds - \int_s r_{rf} \cdot \hat{u} ds \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde $\dot{\xi}$ e $\ddot{\xi}$ obviamente estão avaliados no instante t_{r+1} e r_θ representa a inclinação de cada elemento reto em relação à direção vertical. O vetor r_{rf} (obtido por soma de incrementos de forças) é conhecido e provém de forças associadas ao escoamento do fluido, sendo função da história dos deslocamentos do tubo até a configuração B_r (ver eqs. 3.30 e 3.40).

Observe-se que se se considera que não existe atrito entre o fluido e as paredes do tubo, o movimento do fluido segundo a direção tangencial deve satisfazer a equação:

$$\rho(\ddot{\xi} + g \cos^r \theta) + p_{,s} = 0 \quad (3.62)$$

e dessa forma a equação anterior, simplifica-se para:

$$\begin{aligned}
 {}^{r+1}\bar{W}_r = & - \int_S \rho A_f ({}^{r+1}\ddot{u}_n + 2\dot{\xi} {}^{r+1}\dot{u}_{n,s} + \dot{\xi}^2 u_{n,ss} + \ddot{\xi} u_{n,s}) \hat{u}_n ds - \\
 & - \int_S A_f (p_{,s} u_{n,s} + p u_{n,ss}) \hat{u}_n ds - \int_S \rho A_f g \sin^r \theta \hat{u}_n ds - \\
 & - \int_S \mu A g (\cos^r \theta \hat{u}_s + \sin^r \theta \hat{u}_n) ds - \int_S \frac{r}{r_f} \cdot \hat{u} ds \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

A equação (3.59) juntamente com a expressão anterior fornecem o esquema incremental, com o qual é possível, via método dos numéricos aproximados, calcular a resposta do sistema.

3.5. Estabilidade Infinitesimal

Suponha-se que de alguma forma seja possível manter o tubo na sua configuração reta, com o fluido escoando internamente, e a que a este sistema seja dada uma pequena perturbação inicial. Deve-se esperar, obviamente, que o escoamento do fluido venha a ter alguma influência sobre o comportamento do tubo. A pergunta é: será esse efeito estabilizador ou desestabilizador? Além disso, será que é possível, pelo menos em alguma situação particular, prever-se alguma informação sobre este efeito?

Com esse objetivo, nesta seção, vai-se formular o estudo da estabilidade infinitesimal de uma solução particular do problema proposto na seção 3.3.

3.5.1. Movimento Não-Perturbado

Para se fixar idéias vai se eleger para movimento não perturbado aquele correspondente a um tubo vertical engastado em $X_1 = 0$ e sujeito a um esforço de compressão $-N^*$ (força não con-

servativa), atuando em $X_1 = L$ (fig. 3.7).

Para a determinação da solução não perturbada $\underline{u}^*(X_1, t)$ denotada por:

$$\underline{u}^* = u_1^*(X_1, t) \underline{e}_1 \quad (3.64a)$$

vai se desprezar a força de inércia $\mu A \ddot{u}_1$ associada à vibração longitudinal do tubo (solução quase-estática).

$$\mu A \ddot{u}_1 = 0 \quad (3.64b)$$

Esta simplificação é aceitável em se tratando de vigas flexíveis. Por outro lado está sendo considerado que a frequência da excitação está abaixo da frequência fundamental de vibração longitudinal do tubo, de forma que não existe possibilidade de ocorrência de ressonância simples. Essa consideração é razoável, já que as frequências de vibração longitudinais são normalmente elevadas.

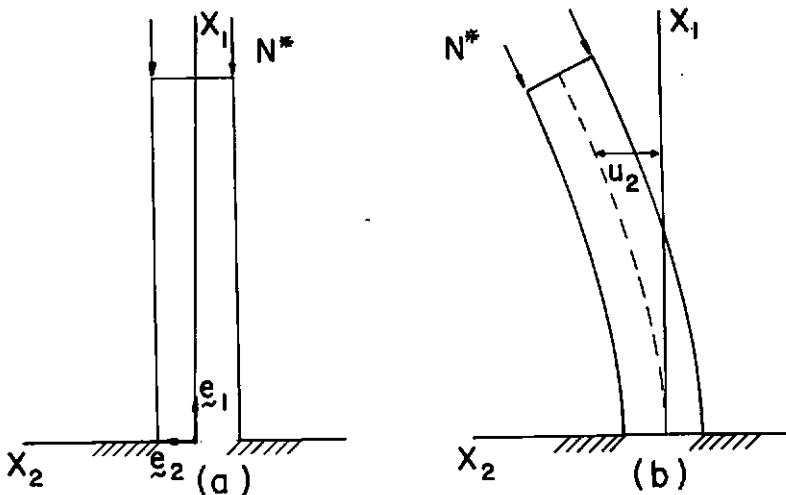


Fig. 3.7 - Perturbação sobre as condições iniciais do movimento

Com relação ao escoamento do fluido, vai se assumir que a velocidade média $\dot{\xi}$ (definida pela eq. 3.24), é conhecida, e que a pressão de descarga é p^* .

$$p(L,t) = p^* \quad (3.65)$$

Substituindo-se a solução, $u^*(X_1,t)$ em (3.50a-b) com a condição (3.64b), obtem-se

$$-EAu_1^{*''} + \mu Ag + \rho A_f(g + \ddot{\xi}) + A_f p' = 0, \quad (3.66)$$

e condições de contorno

$$u_1^*(0,t) = 0 ; EAu_1^{*'}(L,t) = -N^* \quad (3.67a-b)$$

Os dois últimos termos que aparecem em (3.66) correspondem à força de atrito que se desenvolve entre o fluido e as paredes do tubo. Se não se considera o atrito deve-se ter:

$$\rho(g + \ddot{\xi}) + p' = 0 \quad (3.68)$$

e nestas condições sendo N^* constante no tempo, u_1^* é uma posição de equilíbrio (solução estática) e a condição (3.64b) se cumpre identicamente.

Integrando-se (3.66) com as condições (3.65) e (3.67a-b), obtem-se:

$$-EAu_1^{*'} = (\mu A + \rho A_f)g(L - X_1) + \rho A_f \ddot{\xi}(L - X_1) + A_f(p^* - p) + N^* \quad (3.69)$$

3.5.2. Movimento Perturbado

Conforme foi visto no capítulo II - Seção 2.4, o estudo da estabilidade da solução particular $u^*(X_1,t)$ vai ser transformado no estudo do comportamento de solução trivial $u = 0$, obtida da transformação:

$$\underline{u}^* = \underline{u}^* + \underline{u} \quad (3.70)$$

onde \underline{u}^* é a solução perturbada e a perturbação \underline{u} é:

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 \quad (3.71)$$

Observe-se que se está utilizando a mesma notação usada na seção 3.2 para representar os deslocamentos de um ponto do eixo do tubo. Isto é proposital, já que a perturbação \underline{u} , corresponde a um deslocamento referido a uma certa configuração de referência, no caso a configuração reta do tubo e representado no "mesmo" sistema $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ usado naquela seção.

Substituindo-se (3.70) em (3.52a-b), observando-se que \underline{u}^* satisfaz (3.66), obtêm-se as equações de perturbação:

$$\begin{aligned} & -EAu_1'' - EAu_2' u_2'' - \rho A_f \left[\int_0^{X_1} [(\dot{u}_{2,\zeta})^2 + \ddot{u}_{2,\zeta} u_{2,\zeta}] d\zeta + \right. \\ & \quad \left. + 2\dot{\xi} \dot{u}_2' u_2' + \dot{\xi}^2 u_2'' u_2' \right] - A_f p u_2'' u_2' = 0 \\ & (\mu A + \rho A_f) \ddot{u}_2 + 2\rho A_f \dot{\xi} \dot{u}_2' - (\mu A + \rho A_f) g u_2' + \{N^* + A_f p^* + \\ & \quad + [(\mu A + \rho A_f) g + \rho A_f \ddot{\xi}] (L - X_1) + \rho A_f \dot{\xi}^2\} u_2'' + \\ & \quad + EI u_2'''' - EA \left[u_2' u_1' + \frac{1}{2} u_2'^3 \right]' = 0 \end{aligned} \quad (3.72a-b)$$

e condições de contorno:

$$\begin{aligned} EA(u_1' + \frac{1}{2} u_2'^2) \Big|_L &= 0 & e \quad u_1(0) &= 0 \\ \{-EI u_2'''' + EA(u_1' u_2' + \frac{1}{2} u_2'^3)\} \Big|_L &= 0 & e \quad u_2(0) &= 0 \\ EI u_2''(L) &= 0 & e \quad u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.73a-f)$$

Como se está tratando de estabilidade infinitesimal, is

to \bar{e} :

$$\underline{u} \ll \underline{u}^* \quad (3.74)$$

pode-se linearizar as expressões anteriores, obtendo-se:

$$\left. \begin{aligned} -EAu_1'' &= 0 \\ EAu_1'(L) &= 0 \\ u_1(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow u_1(X_1, t) = 0 \quad (3.75)$$

e:

$$\begin{aligned} (\mu A + \rho A_f) \ddot{u}_2 + 2\rho A_f \dot{\xi} \dot{u}_2' - (\mu A + \rho A_f) g u_2' + \{N^* + A_f p^* + [(\mu A + \\ + \rho A_f) g + \rho A_f \ddot{\xi}] (L - X_1) + \rho A_f \dot{\xi}^2\} u_2'' + EI u_2''' = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} EI u_2'''(L) &= 0 & u_2(0) &= 0 \\ &e & & \\ EI u_2''(L) &= 0 & u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.77a-d)$$

A equação (3.76) corresponde à forma linearizada da equação de perturbação. E conforme se verá posteriormente, será em função do comportamento da solução u_2 desta equação, que serão inferidas conclusões sobre a estabilidade da solução particular $\underline{u}^*(X_1, t)$.

A dedução dessa equação, com condições de contorno (3.77a-d), foi feita para o problema particular proposto no ítem anterior. Obviamente, outras situações de forças externas e/ou condições de contorno diferentes, podem ser tratadas de forma semelhante. Assim, se no bordo livre, não existir força aplicada, então $N^* = 0$, ou ainda, se a força aplicada é conservativa a condição de contorno (3.77a) deve representar a situação de cortan

te não nulo neste bordo. Além disso, se o fluido é lançado à pres são atmosférica, então $p^* = 0$.

Observe-se que na eq. (3.76) os coeficientes de u_2 e suas derivadas envolvem parâmetros (velocidade, aceleração, pres são), que dizem respeito ao escoamento do fluido. O problema portanto consiste em determinar sob que condições de fluxo, a so lução u_2 desta equação, é estável ou não. Duas situações bem dis tintas se apresentam claramente:

i) escoamento em regime permanente

Neste caso $\dot{\xi} = \text{constante}$, $\ddot{\xi} = 0$, e os coeficientes de u_2 e suas derivadas são constantes no tempo;

ii) escoamento em regime transiente

Neste caso $\dot{\xi} = f(t)$ e os coeficientes de u_2 dependem explicitamente do tempo.

3.5.3. Forma Fraca da Equação de Perturbação

Em quaisquer das situações acima mencionadas, o estudo da estabilidade diretamente sobre a equação a derivadas parciais (eq. 3.76) é bastante complicado e somente em alguns casos (como se verá na próxima seção) podem-se obter previsões sobre o comportamento da solução. Para um tratamento geral torna-se necessário a utilização de métodos numéricos aproximados, que permitam transformar a eq. (3.76) num sistema de equações diferenciais ordinárias, na variável tempo, sobre o qual o estudo da es tabilidade será realizado, conforme será visto nos capítulos IV e V.

Assim, de acordo com o que foi feito no capítulo II, é conveniente a obtenção da forma fraca da equação de perturbação,

o que pode ser conseguido diretamente de (3.49), introduzindo-se a relação (3.70), as condições (3.64), (3.69) e (3.74) e considerando-se também o trabalho virtual da força não conservativa atuando na extremidade livre do tubo, cuja expressão é:

$$\bar{W}_3 = -N^* \bar{u}_1(L) - N^* u_2'(L) \bar{u}_2(L) \quad (3.78)$$

Se se procede dessa maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L [\mu A \ddot{u}_2 \bar{u}_2 + E I u_2'' \bar{u}_2''] dX_1 - \int_0^L \{ [(\mu A + \rho A_f) g + \rho A_f \ddot{\xi}] (L - X_1) + \\ + A_f (p^* - p) + N^* \} u_2' \bar{u}_2' dX_1 + \int_0^L \{ \rho A_f [\ddot{u}_2 + 2\dot{\xi} \dot{u}_2' + \dot{\xi}^2 u_2'' + \\ + \ddot{\xi} u_2'] + A_f [p u_2']' \} \bar{u}_2 dX_1 + N^* u_2'(L) \bar{u}_2(L) = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Se se integra por partes o segundo termo da terceira integral, obtém-se alternativamente:

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mu A + \rho A_f) \ddot{u}_2 \bar{u}_2 dX_1 + \int_0^L E I u_2'' \bar{u}_2'' dX_1 - \int_0^L \{ [(\mu A + \rho A_f) g + \\ + \rho A_f \ddot{\xi}] (L - X_1) + A_f p^* + N^* \} u_2' \bar{u}_2' dX_1 + \int_0^L \rho A_f (2\dot{\xi} \dot{u}_2' + \\ + \dot{\xi}^2 u_2'' + \ddot{\xi} u_2') \bar{u}_2 dX_1 + (N^* + A_f p^*) u_2'(L) \bar{u}_2(L) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

As equações (3.79) ou (3.80) correspondem à forma integral de (3.76). As condições de contorno são as mesmas daquelas apresentadas nas relações (3.77a-d), e as mesmas observações feitas no item anterior, com relação a outros tipos de forças e condições de contorno, permanecem válidas. Ressalta-se que nos casos em que os bordos são restringidos contra deslocamentos transversais ($u_2(L) = 0$), ou ainda no caso em que N^* é conservativa, o último termo de (3.79) é identicamente nulo.

3.6. Vibrações Lineares

A equação de perturbação (eq. 3.76), ou sua forma integral (eq. 3.80), pode ser visualizada como a equação de vibrações livres (pequenos deslocamentos) em torno de uma posição de equilíbrio, desde que em cada caso particular sejam especificadas as condições de contorno e as condições iniciais. É portanto válido procurar, analisando-se este problema, obter se possível algumas informações sobre o comportamento do sistema.

Dentro desse contexto pode ser interessante, por exemplo, a obtenção de integrais do movimento, com a caracterização do hamiltoniano e do lagrangiano do sistema. É também conveniente o estudo dos auto-valores associados ao problema de vibrações livres.

3.6.1. Integral de Jacobi

Observando-se que a equação (3.80) é válida para qualquer função pertencente ao espaço das variações admissíveis e se se relembra a definição (2.20b):

$$\underline{\hat{u}} \in \hat{\mathcal{V}} ; \hat{\mathcal{V}} = \{ \underline{\hat{u}} ; \underline{\hat{u}} |_{\partial_u \mathbf{B}_t} = \underline{0} \}$$

$\hat{\mathcal{V}}$ - espaço das variações admissíveis.

Verifica-se que o campo de velocidades reais (solução do problema proposto) é um elemento de $\hat{\mathcal{V}}$. Assim, adotando-se em (3.80)

$$\underline{\hat{u}}_2 = \dot{\underline{u}}_2 \quad (3.81)$$

chega-se a uma equação de energia da forma:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \{ \mu A \ddot{u}_2 \dot{u}_2 + E I u_2'' \dot{u}_2' \} dX_1 - \int_0^L \{ (\mu A + \rho A_f) g (L - X_1) + \rho A_f \ddot{\xi} (L - \\
& - X_1) + A_f p^* + N^* \} u_2' \dot{u}_2' dX_1 + \int_0^L \rho A_f (\ddot{u}_2 + 2\dot{\xi} \dot{u}_2' + \dot{\xi}^2 u_2'' + \\
& + \ddot{\xi} u_2') \dot{u}_2 dX_1 + (N^* + A_f p^*) u_2'(L) \dot{u}_2(L) = 0 \quad (3.82)
\end{aligned}$$

3.6.1.1. Vibrações livres autônomas

Neste caso $\dot{\xi} = \text{constante}$; $\ddot{\xi} = 0$ e a equação (3.82) não depende explicitamente do tempo.

Sejam agora as seguintes relações auxiliares:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \ddot{u}_2 \dot{u}_2 dX_1 &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} \dot{u}_2^2 dX_1 \\
\int_0^L u_2' \dot{u}_2' dX_1 &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u_2'^2 dX_1 \\
\int_0^L \dot{u}_2' \dot{u}_2 dX_1 &= \frac{1}{2} \dot{u}_2^2 \Big|_0^L \\
\int_0^L u_2'' \dot{u}_2 dX_1 &= u_2' \dot{u}_2 \Big|_0^L - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u_2'^2 dX_1 \\
\int_0^L u_2'' \dot{u}_2'' dX_1 &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u_2''^2 dX_1 \quad (3.83a-e)
\end{aligned}$$

e procurando-se caracterizar as diferenças básicas de comportamento entre o tubo em balanço e outras situações (bi-apoiado, bi-engastado, apoiado-engastado), para os quais os deslocamentos transversais das extremidades do tubo são impedidos, os seguintes casos serão estudados isoladamente:

a) Tubo com extremidades impedidas a deslocamentos transversais

Neste caso $u_2(0) = u_2(L) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_2(L) = 0$, e fazem-

do-se uso das relações (3.83a-e), a eq. (3.82) pode ser escrita na forma:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \text{ onde:} \quad (3.84)$$

$$H = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \mu A \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} EI u_2''^2 - \frac{1}{2} [(\mu A + \rho A_f) g (L - X_1) + A_f p^* + \right. \\ \left. + N^* + \rho A_f \dot{\xi}^2] u_2'^2 + \frac{1}{2} \rho A_f \dot{u}_2^2 \right\} dX_1 \quad (3.85)$$

onde H representa o hamiltoniano do sistema linearizado.

De (3.84) conclui-se que:

$$H = \text{constante} \quad (3.86)$$

que corresponde, portanto, a integral de Jacobi.

A terceira integral que ocorre em (3.82) é identificada como a potência das forças relacionadas com o escoamento do fluido, ou seja:

$$\dot{W} = - \int_0^L \rho A_f (\ddot{u}_2 + 2\dot{\xi}\dot{u}_2' + \dot{\xi}^2 u_2'') \dot{u}_2 dX_1 \quad (3.87)$$

O segundo termo de (3.87) em vista das condições de contorno (eq. 3.83c), é identicamente nulo, demonstrando que nestas situações as forças de Coriolis não realizam trabalho. Este mesmo resultado é bem conhecido [57], [62], [33] no caso de forças giroscópicas (forças de Coriolis associadas com a rotação rígida de corpos). Em vista das observações anteriores o sistema em estudo, pode ser classificado como do tipo giroscópico.

Se se considera detalhadamente cada termo que aparece em (3.85) é possível estabelecer o lagrangiano do sistema. Procedendo-se dessa forma verifica-se que:

i) Energia cinética do tubo

$$\tau_2^t = \frac{1}{2} \int_0^L \mu A \dot{u}_2^2 dX_1 - \text{função quadrática da velocidade} \quad (3.88)$$

ii) Energia potencial do tubo

$$v^t = v_e^t + v_g^t$$

$$v_e^t = \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2''^2 dX_1 - \text{potencial elástico}$$

$$v_g^t = - \frac{1}{2} \int_0^L \mu A g (L - X_1) u_2'^2 dX_1 - \text{potencial gravitacional} \quad (3.89a-c)$$

iii) Energia cinética do fluido

A energia cinética das partículas de fluido que estão no interior do tubo pode ser calculado a partir de:

$$\tau^f = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_f \underline{v}_f \cdot \underline{v}_f dX_1 \quad (3.90a)$$

Utilizando-se a definição de \underline{v}_f (eq. 3.32), obtem-se:

$$\tau^f = \frac{1}{2} \rho A_f \left[\dot{\xi}^2 L + \int_0^L (\dot{u}_2^2 + 2\dot{\xi} u_2' \dot{u}_2 - 2\dot{\xi} \int_0^{X_1} u_{2,\zeta} \dot{u}_{2,\zeta} d\zeta) dX_1 \right] \quad (3.90b)$$

que pode ser escrita como:

$$\tau^f = \text{constante} + \tau_2^f + \tau_1^f \quad (3.90c)$$

$$\tau_2^f = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_f \dot{u}_2^2 dX_1 - \text{função quadrática da velocidade}$$

$$\tau_1^f = \int_0^L \rho A_f \dot{\xi} [u_2' \dot{u}_2 - (L - X_1) u_2' \dot{u}_2'] dX_1 - \text{função linear nas velocidades generalizadas} \quad (3.90d-e)$$

iv) Energia potencial do fluido

A energia potencial das partículas de fluido no interior do tubo pode ser expressa pela soma:

$$V^f = V_e^f + V_g^f$$

$$V_e^f = - \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_f \dot{\xi}^2 u_2'^2 dX_1 - \text{potencial devido ao escoamento do fluido}$$

$$V_g^f = - \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_f g (L - X_1) u_2'^2 dX_1 - \text{potencial gravitacional} \quad (3.91a-c)$$

v) Potencial das ações externas

Relacionado neste caso com a pressão interna e com o estado inicial de tensões, e dado por:

$$V^a = V_p^a + V_t^a$$

$$V_p^a = - \frac{1}{2} \int_0^L A_f p^* u_2'^2 dX_1$$

$$V_N^a = - \frac{1}{2} \int_0^L N^* u_2'^2 dX_1 \quad (3.92a-c)$$

De acordo com as expressões anteriores o lagrangiano é expresso pela equação:

$$L = T - V, \text{ onde:}$$

$$T = T^t + T^f = T_2^t + T_2^f + T_1^f$$

$$V = V^t + V^f + V^a = V_e^t + V_g^t + V_e^f + V_g^f + V_p^a + V_N^a \quad (3.93a-c)$$

Comparando-se as definições anteriores com a expressão do hamiltoniano, (eq. 3.85), escreve-se:

$$H = \tau_2^t + \tau_2^f + V \quad (3.94)$$

A ausência na expressão do hamiltoniano, de termos lineares nas velocidades generalizadas (τ_1^f) é uma característica de sistemas deste tipo (ver [57]).

Uma outra informação que pode ser rapidamente deduzida a partir de (3.86) diz respeito ao comportamento da energia absorvida pelo tubo. Apenas por simplicidade seja por hipótese $N^* = p^* = g = 0$. Definindo-se, então:

$$E^t = \tau^t + V^t \quad (3.95)$$

como a energia total do tubo, e

$$W = \int_0^t \dot{W} dt = - \int_0^L \frac{1}{2} \rho A_f (\dot{u}_2^2 - \dot{\xi}^2 u_2'^2) dX_1 \quad (3.96)$$

como o trabalho das forças devidas ao escoamento do fluido, tem-se de acordo com (3.86)

$$E^t = W + \text{constante} \quad (3.97)$$

A equação (3.97) mostra que a energia E^t do tubo não se conserva. Existe sempre uma troca de energia: ora o tubo cede energia ao fluido, ora o tubo retira energia deste. Por outro lado foi visto que o hamiltoniano se conserva, que as forças de Coriolis não realizam trabalho, e que as demais forças que atuam sobre o tubo são deriváveis de uma função potencial (ver eqs. 3.91-3.92). Dessa forma o sistema pode ser visto como uma generalização de sistemas giroscópicos conservativos típicos.

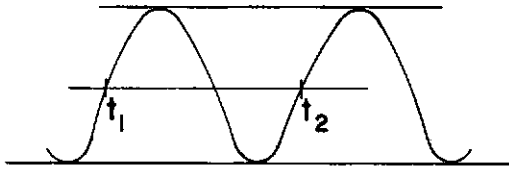
De qualquer forma, verifica-se a partir de (3.96), que existe a possibilidade de ocorrência de movimentos periódicos, e que nesta situação a variação ΔW , do trabalho realizado pelo flui

do sobre o tubo em cada período, e que mede a energia cedida ao tubo neste espaço de tempo, é zero.

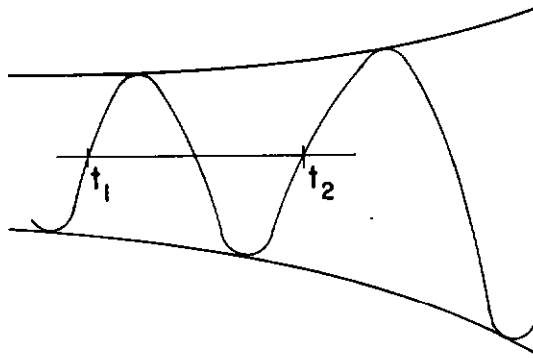
Portanto:

i) se o movimento é periódico, então:

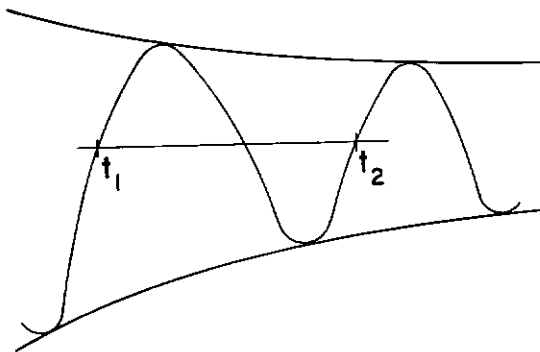
$$W = W(t_2) - W(t_1) = 0 \quad (t_2 - t_1) = \text{período}$$



ii) se $\Delta W > 0$ - energia é cedida ao tubo pelo fluido.



iii) se $\Delta W < 0$ - energia é retirada do tubo pelo fluido



b) Tubo em balanço

Seja agora um tubo em balanço $u_2(0) = \dot{u}_2(0) = 0$. A partir de (3.82) chega-se a:

$$\frac{dH}{dt} = -[\rho A_f \dot{\xi} \dot{u}_2(L) + \rho A_f \dot{\xi}^2 u_2'(L) + (N^* + A_f p^*) u_2'(L) \dot{u}_2(L)] \quad (3.98)$$

demonstrando que nesta situação o hamiltoniano não é mais constante. Observando-se que no caso de sistemas holonômicos não conservativos [57] a equação anterior pode ser escrita na forma geral

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\ell} \underline{Q}_{\ell} \cdot \dot{\underline{u}}_{\ell} \quad (3.99)$$

onde os \underline{Q}_{ℓ} representam forças não conservativas (não deriváveis de uma função potencial), conclui-se da equação anterior, que nesta situação, a ação do fluido sobre o tubo é caracterizada pelo aparecimento de uma força não conservativa

$$\underline{Q} = -\rho A_f [\dot{\xi} \dot{u}_2(L) + \dot{\xi}^2 u_2'(L)] \underline{e}_2 \quad (3.100)$$

atuando na extremidade livre do tubo. Por esta razão define-se este sistema como não conservativo.

O trabalho das forças devidas ao escoamento do fluido, toma a forma:

$$W = \int_0^t \dot{W} dt = -\frac{1}{2} \int_0^L \rho A_f [\dot{u}_2^2 - \dot{\xi}^2 u_2'^2] dX_1 - \int_0^t \rho A_f [\dot{\xi} \dot{u}_2^2(L) + \dot{\xi}^2 u_2'(L) \dot{u}_2(L)] dt \quad (3.101)$$

A primeira parcela de (3.101) que é idêntica àquela obtida em (3.96) corresponde ao trabalho de forças conservativas. A segunda integral fornece o trabalho da força não conservativa, defini

da em (3.100). Quando $\dot{u}_2(L) > \dot{\xi} u'_2(L)$ esta força é contrária ao movimento do tubo implicando em que nesta situação energia é retirada do tubo. Em caso contrário o fluido cede energia ao tubo.

3.6.1.2. Vibrações livres não autônomas

Quando a velocidade de escoamento é função do tempo ($\dot{\xi} \neq 0$) o lagrangiano (eq. 3.93a-c) depende explicitamente do tempo, e a equação (3.82) conduz (no caso de tubos com extremidades fixas), à expressão:

$$\frac{dH}{dt} = \int_0^L \left\{ -\rho A_f \dot{\xi} (u'_2 \dot{u}_2 - \int_0^{X_1} u_{2,\zeta} \dot{u}_{2,\zeta} d\zeta) - \rho A_f \dot{\xi} \dot{\xi} u'^2_2 \right\} dX_1 \quad (3.102)$$

e tendo-se em vista a definição de L (3.93a-c), a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.103)$$

que é uma equação do movimento característico de sistemas para os quais o lagrangiano é uma função explícita do tempo.

3.6.2. Princípio de Hamilton

A forma geral do princípio de Hamilton aplicável a sistemas holonômicos não conservativos é expressa pela equação variacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{W}_{nc} dt = 0 \quad (3.104)$$

onde o símbolo δ representa variação, L é o lagrangiano do sistema e \bar{W}_{nc} é o trabalho virtual das forças não conservativas. Se se utilizam as definições anteriores, (eq. 3.93a-c) e (eq. 3.100) obtem-se a expressão do princípio de Hamilton para o problema em estudo, o qual conduz obviamente à obtenção da equação de vibra

ções livres que é idêntica à equação (3.76). Uma equação semelhante a (3.104) foi deduzida em [8] para o caso de uma associação de tubos rígidos.

Alternativamente o princípio de Hamilton poderia ter sido obtido do princípio dos trabalhos virtuais (eq. 3.80).

3.6.3. Problema de auto-valor

Para o estudo do problema de auto-valor associado à equação de vibrações livres lineares, que como já se viu é idêntica à eq. (3.76), é conveniente a introdução dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \chi &= X_1/L ; \quad \eta = u_2/L ; \quad \tau = \left[\frac{EI}{(\mu A + \rho A_f)} \right]^{1/2} \frac{1}{L^2} t \\ v &= \left(\frac{\rho A_f}{EI} \right)^{1/2} L \dot{\xi} ; \quad \beta = \frac{\rho A_f}{\mu A + \rho A_f} ; \quad \gamma = \frac{(\mu A + \rho A_f)}{EI} L^3 g \\ \Gamma &= \frac{A_f L^2}{EI} p^* ; \quad \nu = \frac{L^2}{EI} N^* ; \quad \lambda = \left[\frac{(\mu A + \rho A_f)}{EI} \right]^{1/2} L^2 \omega \end{aligned}$$

onde ω é a frequência de vibração. Em termos desses parâmetros a equação (3.76) toma a forma:

$$\ddot{\eta} + 2\beta^{1/2} v \dot{\eta}' - \gamma \eta' + [\nu + \Gamma + (\gamma + \beta^{1/2} \dot{v})(1 - \chi) + v^2] \eta'' + \eta''' = 0 \quad (3.105)$$

onde $\eta = \eta(\chi, \tau)$, $(\dot{}) = \frac{d()}{d\tau}$ e $(') = \frac{d()}{d\chi}$

Como vai se estudar exclusivamente o problema de vibrações livres autônomas, o parâmetro v (que define a velocidade adimensional de escoamento) é tomado constante ($\dot{v} = 0$). Além disso vai se supor também que não existe influência do campo gravitacional ($\gamma = 0$), isto é, que as vibrações ocorrem num plano horizon

tal. Com estas hipóteses a equação anterior simplifica-se para:

$$\ddot{\eta} + 2\beta^{1/2} \dot{\eta}' + \alpha^2 \eta'' + \eta''' = 0 \quad (3.106)$$

onde $\alpha^2 = \nu + \Gamma + \nu^2 \quad (3.107)$

Seja agora uma classe especial de movimentos cinematicamente admissíveis dada por:

$$\eta(\chi, \tau) = \psi(\chi) e^{\lambda \tau} \quad (3.108)$$

onde $\psi = u + iw$ é a auto-função complexa, associada ao auto-valor $\lambda = a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$). A parte imaginária do auto-valor está associada à frequência de vibração, a parte real representa o amortecimento e ψ corresponde ao modo de vibração.

Se se substitui (3.108) em (3.106) obtém-se o problema de auto-valor:

$$\lambda^2 \psi + 2\beta^{1/2} \nu \lambda \psi' + \alpha^2 \psi'' + \psi''' = 0 \quad (3.109)$$

Multiplicando-se (3.109) por $\bar{\psi}$ (conjugado de ψ) e integrando-se no domínio espacial, obtém-se:

$$\lambda^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi + \lambda 2\beta^{1/2} \nu \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi + \alpha^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi'' d\chi + \int_0^1 \bar{\psi} \psi''' d\chi = 0 \quad (3.110)$$

que é uma equação algébrica em λ e que permite, conhecida a auto-função, determinar o auto-valor correspondente.

3.6.3.1. Determinação dos pontos críticos - Caracterização dos modos de flambagem

O termo flambagem está relacionado com a perda de equilíbrio estático, sendo caracterizado por $\text{Im } \lambda = \text{Re } \lambda = 0$. Assim quando $\lambda = 0$ a equação (3.109) reduz-se a:

$$\psi'''' + \alpha^2 \psi'' = 0 \quad (3.111a)$$

que representa um novo problema de auto-valor em α^2 .

A solução geral de (3.111a) é da forma:

$$\psi(\chi) = C_1 \cos \alpha \chi + C_2 \sin \alpha \chi + C_3 \chi + C_4 \quad (3.111b)$$

Se esta solução é particularizada para diferentes condições de contorno (está se assumindo implicitamente que as condições de contorno naturais são identicamente nulas), chegam-se às equações características, que fornecem os seguintes valores críticos, para o parâmetro α :

i) viga simplesmente apoiada

$$\alpha_c = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.111c)$$

ii) viga bi-engastada

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 2n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha_c/2 &= \operatorname{tg}(\alpha_c/2) \end{aligned} \quad (3.111d-e)$$

iii) viga apoiada-engastada

$$\alpha_c = \operatorname{tg} \alpha_c \quad (3.111f)$$

iv) viga em balanço - não existe valor crítico associado à flambagem.

Do exposto anteriormente conclui-se que a ocorrência de flambagem está associada ao termo $\alpha^2 \eta''$, o qual é comparável a uma força axial de compressão, quando se considera o problema de flambagem. O fato de ser, esta força axial equivalente, sempre tangente ao eixo do tubo ("follower force"), explica porque

no caso de um tubo em balanço não ocorre flambagem, mas instabilidade dinâmica (como se verá posteriormente).

De acordo com a definição do parâmetro α (eq. 3.107), verifica-se que mesmo no caso em que $v = \Gamma = 0$, ocorre a possibilidade de flambagem com $\Gamma \neq 0$. Ou seja, apenas a ação da pressão interna pode ser responsável pela ocorrência de flambagem. O estudo experimental deste efeito foi feito em [13].

Se em (3.107) faz-se $v = \Gamma = 0$, obtêm-se as velocidades críticas ($\alpha_c = v_c$). Note-se que o termo $v^2 \eta''$ provem da aceleração centrífuga (eq. 3.40). Dessa forma a influência deste termo é de diminuir as frequências de vibração.

3.6.3.2. Estudo qualitativo do comportamento dos auto-valores

Seja de novo o problema de auto-valor definido pela equação

$$\lambda^2 \psi + 2\beta^{1/2} v \lambda \psi' + \alpha^2 \psi'' + \psi''' = 0 \quad (3.109)$$

A dificuldade na obtenção explícita dos auto-valores λ reside, fundamentalmente, no fato de que, devido à presença do termo $\dot{\eta}'$, os modos normais de vibração de uma viga não são mais auto-funções para o problema que se está analisando.

Ainda assim, é possível tentar estabelecer algumas propriedades dos auto-valores λ , quando se varia, por exemplo, a velocidade de escoamento. Vai se impor portanto, daqui para diante, que $v = \Gamma = 0$, isto é $\alpha = v$. E seguindo-se o mesmo enfoque adotado no item 3.6.1 vai se analisar inicialmente os casos em que o tubo tem as extremidades impedidas a deslocamentos transversais e posteriormente o tubo em balanço.

a) Tubo com extremidades fixas

Integrando-se por partes (3.110) e tendo-se em vista que as condições de contorno se anulam identicamente obtém-se:

$$\lambda^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi + \lambda 2\beta^{1/2} v \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi - v^2 \int_0^1 \bar{\psi}' \psi' d\chi + \int_0^1 \bar{\psi}'' \psi'' d\chi = 0 \quad (3.112)$$

O termo independente e o coeficiente de λ^2 são obviamente números reais, e pode-se mostrar que o coeficiente de λ é um imaginário puro. Realmente:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi &= \frac{1}{2} (\cancel{\mu^2 + \omega^2}) \Big|_0^1 + i \int_0^1 (\omega' u - u' \omega) d\chi = \\ &= - \int_0^1 \bar{\psi}' \psi d\chi \end{aligned} \quad (3.113)$$

Se se define agora $\underline{U} = [u \ \omega]^T$, os funcionais presentes em (3.110) ficam dados por:

$$m = \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi = \int_0^1 \underline{U} \cdot \underline{U} d\chi \geq 0 \text{ - positivo definido}$$

$m = 0$ se e só se $\underline{U} = \underline{0} \rightarrow \psi = \bar{\psi} = 0$.

$$k_0 = \int_0^1 \bar{\psi}'' \psi'' d\chi = \int_0^1 \underline{U}'' \cdot \underline{U}'' d\chi \geq 0 \text{ - positivo definido}$$

$$k_1 = \int_0^1 \bar{\psi}' \psi' d\chi = \int_0^1 \underline{U}' \cdot \underline{U}' d\chi \geq 0 \text{ - positivo definido}$$

$$ic = \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi = i \int_0^1 \underline{Z} \underline{U}' \cdot \underline{U} d\chi \text{ - } c \text{ é indefinido} \quad (3.114a-d)$$

\underline{Z} é um tensor antissimétrico cujas componentes não nulas na base $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$, $i, j=1, 2$ são $Z_{12} = -Z_{21} = 1$. O sinal de c

depende do sinal dos vetores \underline{ZU}' e \underline{U} . Além disso $c = 0$ pode ocorrer se $\underline{ZU}' \perp \underline{U}$. A forma do funcional c , que provém do termo $\dot{\eta}'$ associado com as forças de Coriolis, demonstra claramente que a influência desse termo é distorcer os modos normais de vibração livre de uma viga em flexão. Como o coeficiente de c é $\beta^{1/2}v$, onde β representa a relação entre a massa do fluido e a massa total (fluido + tubo), essa distorção será tanto maior quanto maior sejam β e/ou v . No limite, quando $\beta \rightarrow 0$ ou $v \rightarrow 0$, a auto-função do problema tende aos modos normais de vibração livre de uma viga. Fisicamente o que ocorre é que o sinal da velocidade angular $d(\eta')/d\tau$ depende do sinal da rotação η' . Portanto, se se considera inicialmente um modo "standard" de vibração, vê-se facilmente que η' troca de sinal com a variável χ . As forças induzidas pela aceleração de Coriolis trocam de sinal de acordo com η' e portanto não são congruentes com as correspondentes acelerações do tubo. Isto causa uma distorção no modo de vibração e na realidade não tem mais sentido usar-se a expressão "modo de vibração", para o caso geral de tubos conduzindo fluido.

Usando-se as definições (3.114a-d) e de acordo com (3.112), vem:

$$m\lambda^2 + 2\beta^{1/2}v c i \lambda + k_0 - v^2 k_1 = 0 \quad (3.115a)$$

e portanto:

$$\lambda_{(1,2)} = - \left[\frac{\beta^{1/2}v c \pm \sqrt{\beta v^2 c^2 + (k_0 - v^2 k_1)m}}{m} \right] i \quad (3.115b)$$

Denotando-se:

$$d = \beta v^2 c^2 + (k_0 - v^2 k_1)m \quad (3.115c)$$

as seguintes condições podem ocorrer:

- a) $d > 0 ; c \neq 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = \left[-\beta^{1/2} v \frac{c}{m} \pm \frac{\sqrt{d}}{m} \right] i$
- b) $d > 0 ; c = 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = \pm \sqrt{\frac{k_0 - v^2 k_1}{m}} i$
- c) $d = 0 ; c = 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = 0$
- d) $d = 0 ; c \neq 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = -\beta^{1/2} v \frac{c}{m} i$
- e) $d < 0 ; c \neq 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{d}}{m} - \beta^{1/2} v \frac{c}{m} i$
- f) $d < 0 ; c = 0 \rightarrow \lambda_{(1,2)} = \pm \sqrt{\frac{k_0 - v^2 k_1}{m}} \quad (3.116)$

Para valores de v próximos a zero ($v \ll 1$) a equação (3.115b) prevê uma bifurcação no espectro de frequências naturais Λ_j da viga ($\lambda_j|_{v=0} = \Lambda_j, j=1,2,\dots,n$). Realmente, de acordo com esta equação:

$$\lambda = \left[-\beta^{1/2} v \frac{c}{m} \pm \sqrt{1-v^2 \frac{(k_1 m - \beta c^2)}{k_0 m}} \cdot \sqrt{\frac{k_0}{m}} \right] i$$

e tendo-se em vista as definições de k_0, k_1, m e c (eq.3.112a-d) e denotando-se $\|u\|_0 = \int_0^1 u^2 d\chi$, como a norma em H^0 , escreve-se:

$$\|\psi\|_0^2 = \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi = \|\bar{\psi}\|_0^2 = m$$

$$\|\psi'\|_0^2 = \int_0^1 \bar{\psi}' \psi' d\chi = \|\bar{\psi}'\|_0^2 = k_1$$

$$\|\psi''\|_0^2 = \int_0^1 \bar{\psi}'' \psi'' d\chi = \|\bar{\psi}''\|_0^2 = k_0 \quad (3.117a-c)$$

Usando-se a desigualdade de Schwarz, tem-se:

$$c = [\operatorname{Im} \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi] \leq \|\bar{\psi}\|_0 \|\psi'\|_0 \rightarrow 0 \leq c^2 \leq k_1 m$$

e como $0 < \beta < 1$, é válido escrever:

$$0 \leq \beta v^2 c^2 \leq v^2 k_1 m \quad (3.117d)$$

e portanto:
$$\frac{k_1 m - \beta c^2}{k_0 m} \leq \frac{k_1}{k_0}$$

Por outro lado como ψ' anula-se em algum ponto no intervalo $[0, 1]$, conseqüência de que pelas condições de contorno $\psi(0)=\psi(1)=0$, tem-se pela desigualdade de Wirtinger [61] que:

$$k_1 \leq \kappa k_0 \quad ; \quad \kappa \equiv \text{constante}$$

isto é o coeficiente de v em (3.115b) é finito. Por outro lado quando $v \rightarrow 0, \sqrt{k_0/m} \rightarrow \Lambda_j$. Assim para v suficientemente pequeno é válido escrever:

$$\lambda_{(1,2)} \approx \left[-\beta^{1/2} v \frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{k_0}{m}} \right] i \quad (3.118)$$

indicando a ocorrência de bifurcação no espectro de frequências (ver figura 3.8).

Essa bifurcação, que é uma característica de sistemas realmente giroscópicos, isto é, sujeitos a uma rotação rígida [33], [62], não ocorre, entretanto, no problema que está sendo tratado.

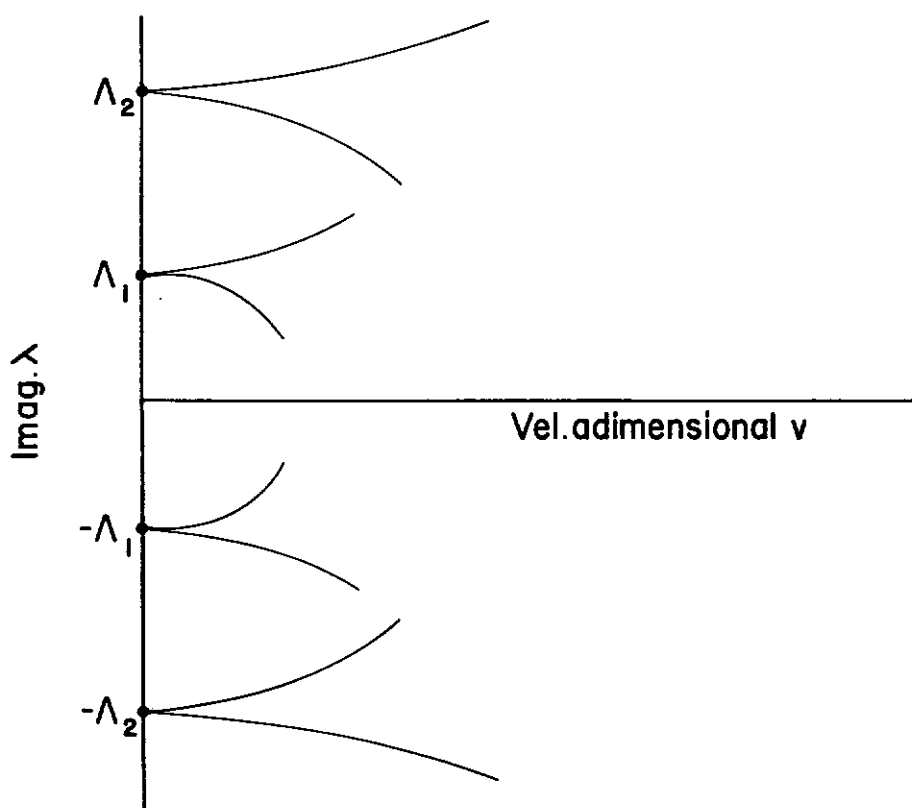


Fig. 3.8 - Inexistência de bifurcação no espectro de frequências

De acordo com (3.115b) existem dois auto-valores $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ associados a uma mesma auto-função ψ . Assim, partindo-se de (3.109) é válido escrever:

$$\lambda_{(1)}^2 \psi + 2\beta^{1/2} v \lambda_{(1)} \psi' + v^2 \psi'' + \psi''' = 0$$

$$\lambda_{(2)}^2 \psi + 2\beta^{1/2} v \lambda_{(2)} \psi' + v^2 \psi'' + \psi''' = 0$$

e por subtração:

$$(\lambda_{(1)}^2 - \lambda_{(2)}^2) \psi + 2\beta^{1/2} v (\lambda_{(1)} - \lambda_{(2)}) \psi' = 0 \quad (3.119)$$

Se $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$, (3.119) é satisfeita, e portanto existirão dois au to-valores iguais associados a uma única auto-função. Entretanto-

to no caso geral $\lambda_{(1)} \neq \lambda_{(2)}$, conduzindo a:

$$(\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)})\psi + 2\beta^{1/2} v \psi' = 0 \quad (3.120)$$

Como β e v independem de χ , (3.120) admite solução da forma:

$$\psi(\chi) = A \exp\left[-\frac{(\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)})}{2\beta^{1/2} v} \chi\right] \quad (3.121)$$

e sendo $\psi(0) = 0$, vem $\psi(\chi) \equiv 0$, implicando em que não podem existir dois auto-valores distintos para uma única auto-função.

Para exemplificar a possibilidade de ocorrência deste fato em problemas giroscópicos, considere-se o problema de vibrações de uma haste bi-apoiada sujeita a uma rotação constante Ω (fig. 3.9).

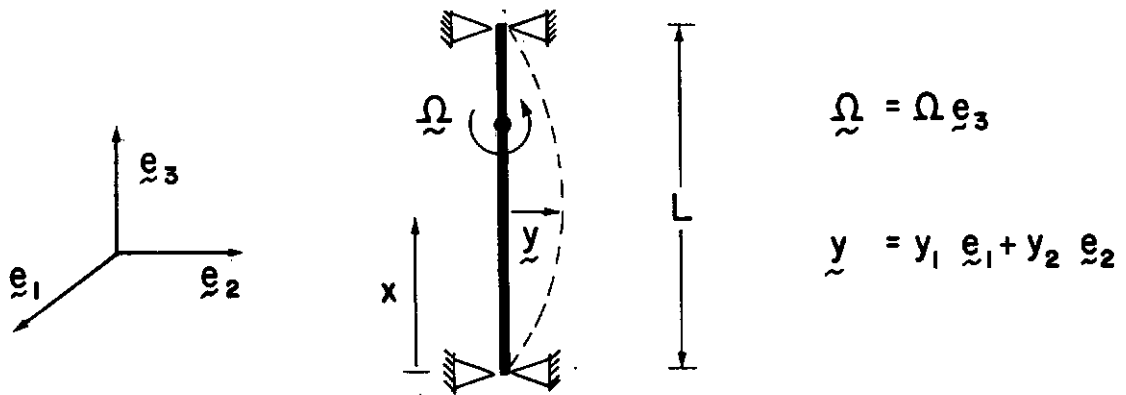


Fig. 3.9 - Haste bi-apoiada com movimento de rotação

Se se considera que a rigidez à flexão nos dois planos é igual e vale k e sendo m a massa por unidade de comprimento, a equação de vibrações livres, dentro da teoria elementar de vigas é [33]:

$$\ddot{y} - 2\Omega \frac{d}{dx} \dot{y} - \Omega^2 y'' + \frac{k}{m} y''' = 0$$

cuja equação de auto-valor pode ser escrita como:

$$\lambda^2 \underline{\psi} - 2\Omega \lambda \underline{Z} \underline{\psi} - \Omega^2 \underline{\psi}'' + \frac{k}{m} \underline{\psi}''' = 0$$

e observando-se que $\underline{\psi}_n = \underline{y}_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ é auto-função, e definindo se $\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \frac{k}{m}$ ($n=1,2,3,\dots$) chega-se à equação característica:

$$\lambda_n^4 + 2(\omega_n^2 + \Omega^2) \lambda_n^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2 = 0$$

que fornece:

auto-valores	auto-funções
$\bar{\lambda}_{n(1)} = (\omega_n - \Omega) i$	$\bar{\underline{\psi}}_{n(1)} = [1 \quad -i]^T \sin \frac{n\pi x}{L}$
$\lambda_{n(1)} = -(\omega_n - \Omega) i$	$\underline{\psi}_{n(1)} = [1 \quad i]^T \sin \frac{n\pi x}{L}$
$\lambda_{n(2)} = (\omega_n + \Omega) i$	$\underline{\psi}_{n(2)} = [1 \quad i]^T \sin \frac{n\pi x}{L}$
$\bar{\lambda}_{n(2)} = -(\omega_n + \Omega) i$	$\bar{\underline{\psi}}_{n(2)} = [1 \quad -i]^T \sin \frac{n\pi x}{L}$

demonstrando portanto a existência de dois auto-valores distintos associados a uma mesma auto-função.

Este mesmo resultado obtem-se obviamente partindo-se do quociente de Rayleigh, que para este problema é:

$$\lambda_n^2 \int_0^L \bar{\underline{\psi}}_n \cdot \underline{\psi}_n dx - 2\Omega \lambda_n \int_0^L \bar{\underline{\psi}}_n \cdot \underline{Z} \underline{\psi}_n dx - \Omega^2 \int_0^L \bar{\underline{\psi}}_n' \cdot \underline{\psi}_n' dx +$$

$$+ \frac{k}{m} \int_0^L \bar{\underline{\psi}}_n'' \cdot \underline{\psi}_n'' dx = 0$$

onde o coeficiente de λ_n é também um imaginário puro, mas neste caso não ocorre distorção nos modos normais de vibração (sem ro

tação) que permanecem sendo auto-funções deste problema.

Se se experimentam quaisquer dos dois conjuntos de auto-funções mostrados acima, chegam-se aos mesmos pares de auto-valores obtidos anteriormente, o que está de acordo com a equação de teste (ver eq. 5.78):

$$(\lambda_{n(1)} + \lambda_{n(2)}) \psi_n - 2\Omega \sum \psi_n = 0 ,$$

que se cumpre identicamente para cada auto-função ψ_n e os seus correspondentes auto-valores $\lambda_{n(1)}$ e $\lambda_{n(2)}$, comprovando que nos problemas giroscópicos ocorre realmente uma bifurcação no espectro de frequências do problema estacionário ($\Omega=0$).

Ficou evidenciado desta forma (3.120) que no caso de tubos conduzindo fluido, existe apenas um auto-valor λ associado à auto-função ψ , e que satisfaz a equação:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi + \lambda 2\beta^{1/2} v \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi - v^2 \int_0^1 \bar{\psi}' \psi' d\chi + \\ + \int_0^1 \bar{\psi}'' \psi'' d\chi = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Seja agora:

$$\bar{\eta} = \bar{\psi} e^{\bar{\lambda}\tau} \quad (3.122)$$

onde $\bar{\eta}$ é o complexo conjugado de η e:

$$\bar{\psi} = u - i\omega \quad ; \quad \bar{\lambda} = a - bi \quad (\text{ver eq. 3.108})$$

Procedendo-se analogamente ao que foi feito no início deste item, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^2 \int_0^1 \psi \bar{\psi} d\chi - \bar{\lambda} \cdot 2\beta^{1/2} v \int_0^1 \psi' \bar{\psi} d\chi - v^2 \int_0^1 \psi' \bar{\psi}' d\chi + \\ + \int_0^1 \psi'' \bar{\psi}'' d\chi = 0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

e comparando-se (3.110) e (3.123) conclui-se que se λ é um auto valor $(-\lambda)$ também o será.

Em vista das discussões anteriores as seguintes conclu sões parciais podem ser coletadas:

- i) Não podem existir dois auto-valores distintos associados a uma mesma auto-função.
- ii) Existe um grupo de velocidades v_c (velocidades críticas) pa ra as quais $\lambda = 0$ (flambagem).
- iii) Próximo a $v = 0$, tem-se sempre que o discriminante d (eq. 3.115c) é positivo ($d > 0$) e portanto todos os auto-valores são imaginários puros.
- iv) Se existe o auto-valor λ ocorre também o seu simétrico $(-\lambda)$, isto é:
 - a) raízes imaginárias puras

Se para determinado valor de v existir a raiz $\lambda = bi$ exis tirará também a raiz $(-bi)$.

- b) raízes reais

Se para determinado valor de v existir a raiz real $\lambda = a$ existirá também a raiz $(-a)$ e elas estarão associadas a auto-funções distintas.

- c) raízes complexas

Se para determinado valor de v existir a raiz $\lambda = a + bi$

existirão também as raízes $(a-bi)$, $(-a-bi)$, $(-a+bi)$. Ou seja raízes complexas ocorrem sempre em pares da forma $(\pm a \pm bi)$. Cada par de auto-valores complexos conjugados estando associados a auto-funções complexas conjugadas.

A esta altura já se dispõem de resultados suficientes para se tentar analisar a variação de λ com o parâmetro v .

Próximo a $v = 0$ tem-se $d > 0$; $\text{Re } \lambda = 0$; $\lambda = \pm i\lambda_i$ (eq. 3.116a), e à medida que v cresce, λ decresce, até um valor de v ($v = v_c$) para o qual $\lambda = 0$ (fig. 3.10).

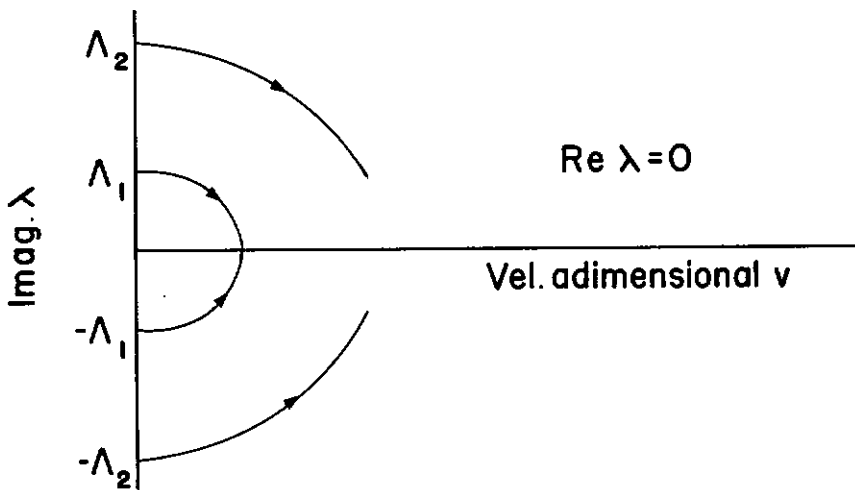


Fig. 3.10 - Redução nas freqüências de vibração

Dada a dependência contínua de d (eq. 3.115) com o parâmetro v e tendo em mente a relação (3.117d) deve-se chegar a situação em que o discriminante d se anula (ver eqs. 3.116c-d). Suponha-se que esta situação ($d=0$) ocorre com $c \neq 0$. Então:

$$v^2 = \frac{k_0 m}{k_1 m - \beta c^2} \quad (3.124)$$

Como $\beta c^2 > 0$; $v^2 \geq k_0/k_1$ e obviamente $v^2 \geq \min k_0/k_1$.

Mas a determinação do $\min k_0/k_1$ corresponde a obter o $\min k_0$ com a condição $k_1=1$. E usando-se as definições (3.114b-c), isto é:

$$k_0 = \int_0^1 \underline{u}'' \cdot \underline{u}'' d\chi \quad ; \quad k_1 = \int_0^1 \underline{u}' \cdot \underline{u}' d\chi$$

vê-se que o problema anteriormente proposto é equivalente à obtenção do mínimo do funcional:

$$J(\underline{u}, \alpha) = \int_0^1 \underline{u}'' \cdot \underline{u}'' d\chi - \alpha^2 \left[\int_0^1 \underline{u}' \cdot \underline{u}' d\chi - 1 \right] \quad (3.125)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são:

$$\begin{cases} \underline{u}'''' + \alpha^2 \underline{u}'' = 0 \\ \text{condições de contorno} \end{cases} \quad (3.125-a)$$

$$\alpha \left[\int_0^1 \underline{u}' \cdot \underline{u}' d\chi - 1 \right] = 0 \quad (3.125-b)$$

Mas se \underline{u} é solução do problema de Sturm-Liouville (eq. 3.125-a + cond. de contorno) então é válido escrever:

$$\int_0^1 (\underline{u}'''' + \alpha^2 \underline{u}'') \cdot \underline{u} d\chi = 0 \rightarrow \int_0^1 \underline{u}'' \cdot \underline{u}'' d\chi - \alpha^2 \int_0^1 \underline{u}' \cdot \underline{u}' d\chi = 0,$$

$$\text{e portanto } \alpha^2 = \int_0^1 \underline{u}'' \cdot \underline{u}'' d\chi, \quad (3.126)$$

isto é o $\min k_0$ é igual ao menor valor característico de (3.125-a).

A similaridade deste problema com aquele tratado no item 3.6.3.1 (eq. 3.111) é óbvia, ou seja:

$$\alpha^2 = \text{menor velocidade crítica} \quad (3.127)$$

e a conclusão a que se chega é que à medida em que se aumenta v , sempre ocorre flambagem ($\lambda=0$; condição 3.116c) antes que as situações (3.116d-e-f) possam acontecer. Portanto se $v < 1^a$ velocidade crítica, todos os autovalores tem $\text{Re } \lambda_j = 0$, havendo portanto a possibilidade de se ter um movimento periódico, o caso mais simples sendo aquele em que a condição inicial tem projeção apenas sobre uma auto-função: neste caso $\Delta W = 0$ (ver eq. 3.97). Para uma condi-

ção inicial qualquer deve-se ter um movimento quase periódico.

Tendo-se alcançado um valor de v para o qual ocorre flambagem no 1º modo, $\lambda(\Lambda_1) = \lambda(-\Lambda_1) = 0$, a pergunta agora é: como se comportam este modo e os modos superiores se se continua aumentando o valor de v ? Convém ressaltar neste ponto, que como já foi dito no início desta seção, o conceito de modo está sendo usado de forma não apropriada, mas justificada pela necessidade de se caracterizar as curvas de variação dos auto-valores, correlacionando-as com as frequências de vibração Λ_j correspondentes a $v=0$.

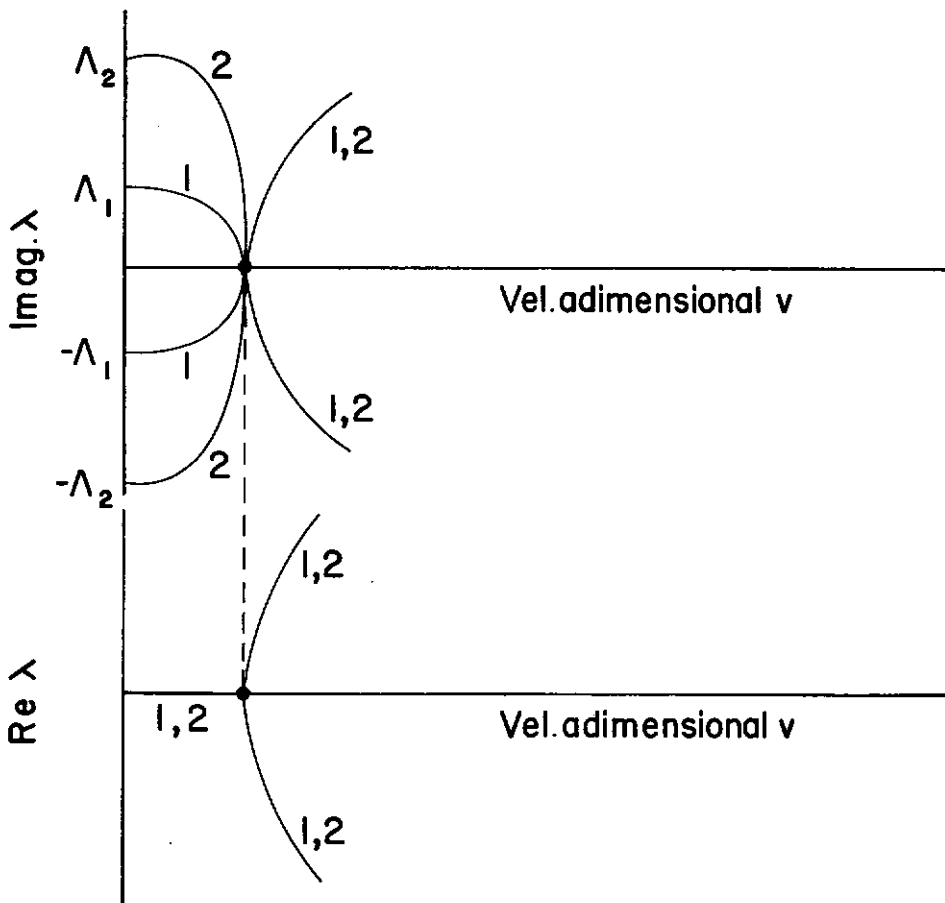


Fig.3.11 - Curvas características (λ, v) - não realizáveis

Seja então a condição $d_1 < 0$ com $c_1 \neq 0$ (3.116-e). Neste caso associado ao modo $\psi(\Lambda_1)$ deve-se ter uma raiz complexa $\lambda(\Lambda_1) = a+bi$ e a complexa conjugada $\lambda(-\Lambda_1) = a-bi$ correspondente a $\bar{\psi}(\Lambda_1) \equiv \psi(-\Lambda_1)$. Porém como já se tinha mostrado antes, a raiz $(-\lambda)$ também deve existir, o que só seria possível se alguma outra auto-função conduzisse a $d = 0$ (ver fig. 3.11), o que está em desacordo com as velocidades críticas calculadas nas eqs. 3.111c-f.

Se alternativamente se admitisse $d_1 = 0$, $c_1 \neq 0$ de acordo com (3.116d) ter-se-iam duas raízes imaginárias iguais e portanto dois modos iguais (ver fig. 3.12), o que por um raciocínio idêntico ao anterior prova-se não ser possível.

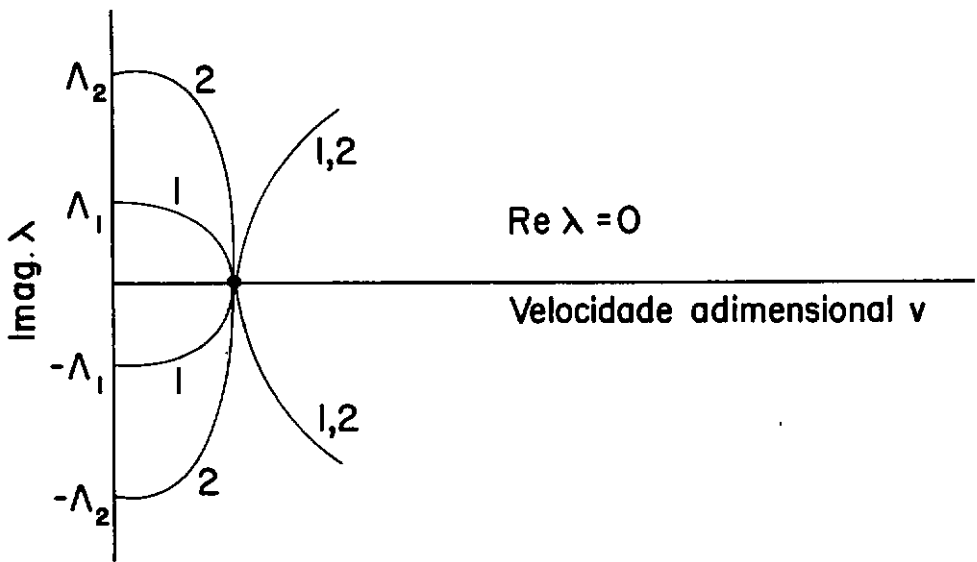


Fig. 3.12 - Curvas características (λ, v) - não realizáveis

Dessa forma a única opção restante seria $d_1 < 0$; $c_1 = 0$ (3.116f), e se se assume agora que o modo de flambagem permanece inalterado (por exemplo no caso bi-apoiado $\psi(\Lambda_1) = \psi(-\Lambda_1) = \sin \pi \chi$), dever-se-ia obter uma variação de $\text{Re } \lambda$ como indicado na fi-

gura abaixo.

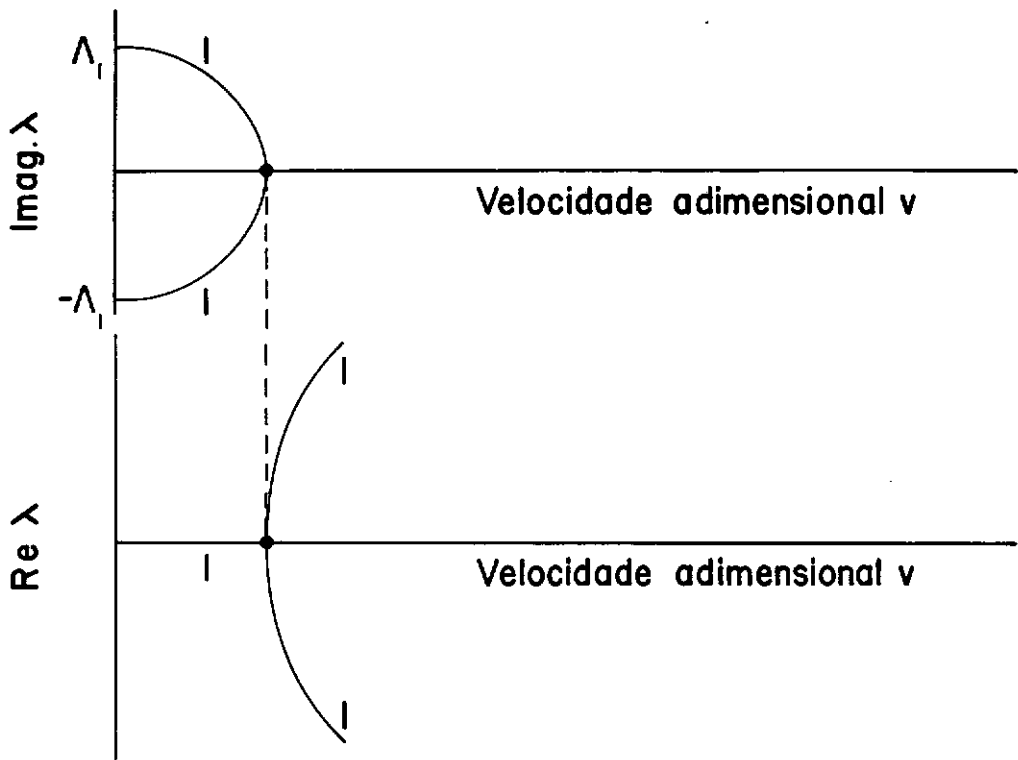


Fig. 3.13 - Curvas características (λ, v) - não realizáveis

Mas isso implica em se ter dois auto-valores distintos para uma mesma auto-função o que não pode acontecer. Uma possibilidade seria $\psi(\Lambda_1)$ e $\psi(-\Lambda_1)$ reais mas uma combinação de distintos modos de flambagem. Assim por exemplo poder-se-ia tentar uma auto-função envolvendo o 1º e o 2º modos de flambagem, ou seja:

$$\psi(\Lambda_1) = A \sin \pi \chi + B \sin 2\pi \chi \leftrightarrow \lambda(\Lambda_1) = a \text{ (real)}$$

$$\psi(-\Lambda_1) = A \sin \pi \chi - B \sin 2\pi \chi \leftrightarrow \lambda(-\Lambda_1) = -a$$

e os coeficientes A e B seriam tais que para $v = \pi$ (1.^a velocidade crítica) $B = 0$, e à medida que $v \rightarrow 2\pi$ (2.^a velocidade crítica) $A \rightarrow 0$ de forma que o auto-valor variaria, segundo a relação:

$$\lambda = \pi \sqrt{v^2 (A^2 + 4B^2) - \pi^2 (A^2 + 16B^2)} / (A^2 + B^2) \quad (3.128)$$

cujo gráfico correspondente seria:

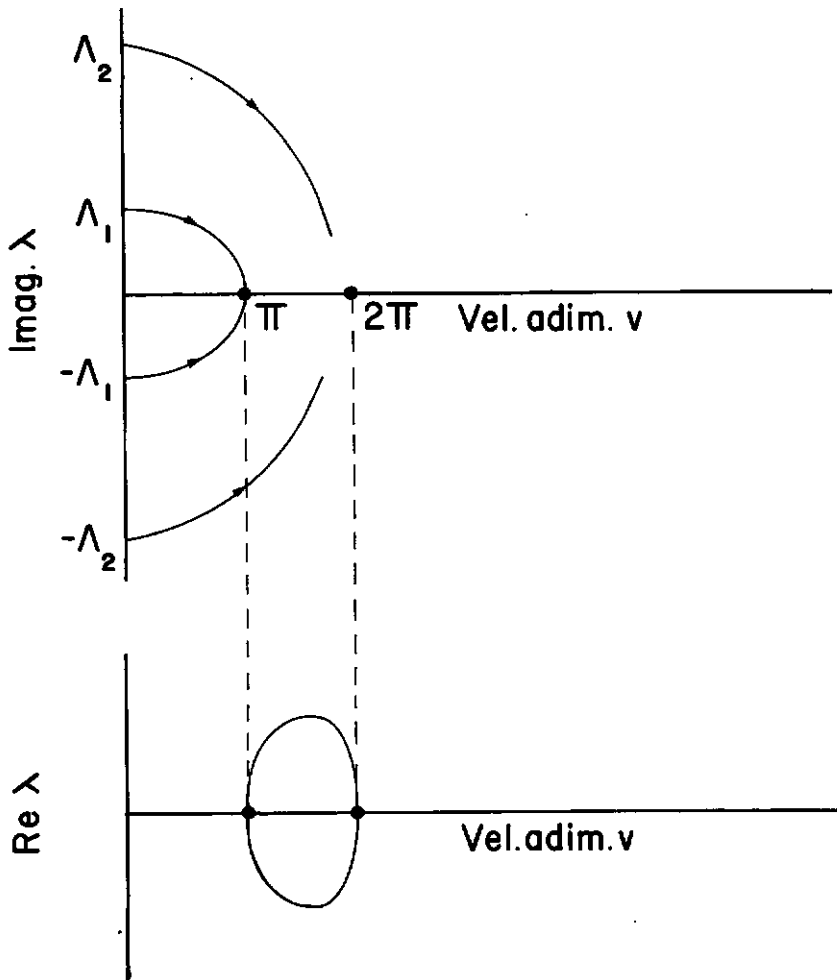


Fig. 3.14 - Comportamento dos auto-valores
Tubo bi-apoiado - $0 \leq v < 2^a v_c$

Resumindo-se:

Quando $v = 1^a v_c$, isto é $\lambda(\Lambda_1) = \lambda(-\Lambda_1) = 0$, as auto-funções correspondentes são iguais $\psi(\Lambda_1) = \psi(-\Lambda_1)$ e reproduzem o 1º modo de flambagem de uma viga. Quando, $1^a v_c < v < 2^a v_c$, os auto-valores $\lambda(\Lambda_1)$ e $\lambda(-\Lambda_1)$ são reais e simétricos e as auto-funções correspondentes, que são diferentes, se modificam à medida que v cresce.

Para estudar um possível comportamento para a segunda auto-função, a partir do ponto em que $v = 2^{\text{a}}$ vel. crítica, vai se admitir que neste ponto $\lambda(\pm\Lambda_1) = 0$ para a primeiro modo. Suponha-se que a partir deste ponto $d_1 < 0$; $c_1 \neq 0 \rightarrow \lambda(\pm\Lambda_1) = \pm bi$. Porém neste caso deve-se ter também $\lambda(\pm\Lambda_2) = -\pm bi$ e isso só é admissível se para alguma outra auto-função (a segunda) $d_2 < 0$ e $c_2 \neq 0$, e portanto já ocorreu a situação $d_2 = 0$; e se $c_2 \neq 0$, de acordo com (3.116d) existem duas raízes imaginárias iguais ($\lambda(\Lambda_2) = \lambda(-\Lambda_2)$). Como a raiz $(-\lambda)$ deve existir a conclusão cor

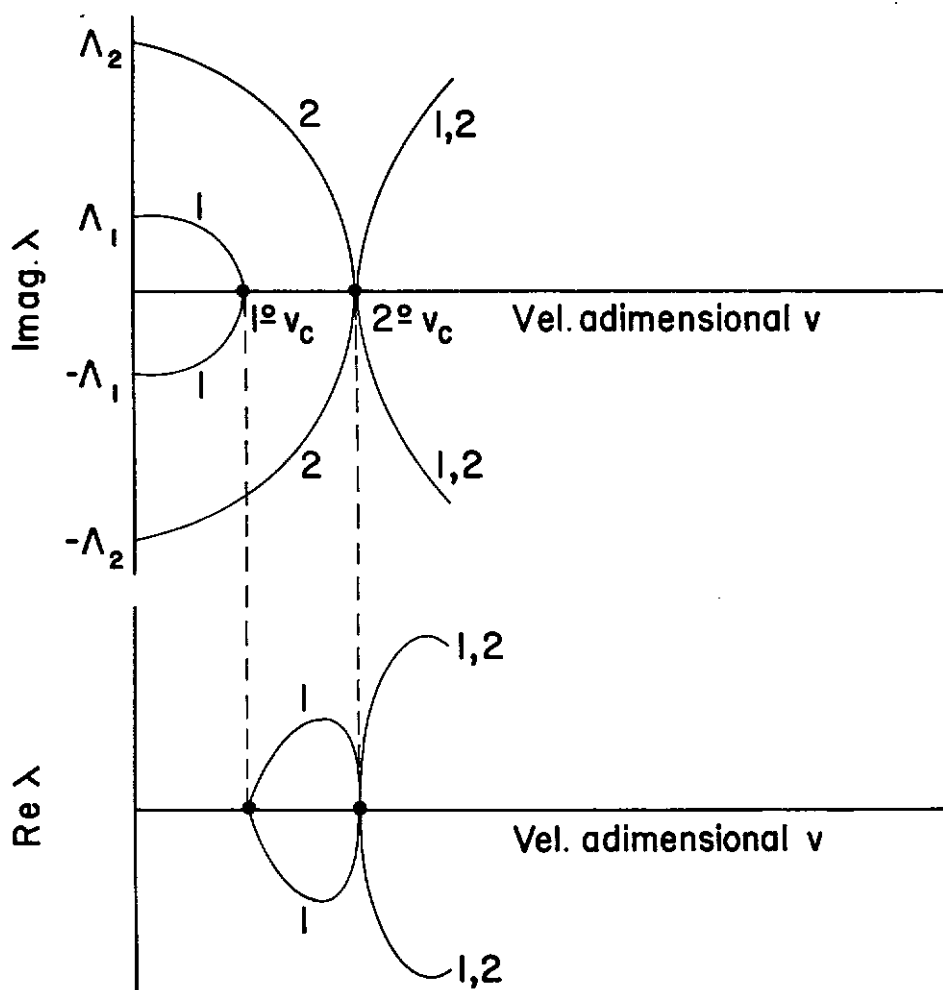


Fig. 3.15 - Ocorrência de "coupled mode flutter"

reta \bar{e} que já ocorreu anteriormente a situação: dois modos iguais $\psi(\Lambda_1) = \psi(\Lambda_2)$, $\bar{\psi}(\Lambda_1) = \bar{\psi}(\Lambda_2)$ e duas raízes iguais $\lambda(\pm\Lambda_1) = \pm bi$ e $\lambda(\pm\Lambda_2) = \pm bi$. Se se aumenta v pode-se então chegar à condição $d_1 < 0$; $d_2 < 0$; $\psi(\Lambda_1) \neq \psi(\Lambda_2)$; $\lambda(\pm\Lambda_1) = a \pm bi$; $\lambda(\pm\Lambda_2) = -a \pm bi$. (ver fig. 3.15).

A ocorrência de raízes complexas da forma $\lambda(\pm\Lambda_1) = a \pm bi$ e $\lambda(\pm\Lambda_2) = -a \pm bi$ indica que nesta situação o comportamento do sistema pode ser vibratório com amplitudes crescendo ($\Delta W > 0$) ou decrescendo ($\Delta W < 0$) exponencialmente com o fator e^{at} , dependendo se a condição inicial corresponde a auto-função associada ao auto-valor com parte real positiva ou negativa, respectivamente. Claro está que se a condição inicial tem alguma componente sobre a auto-função associada ao auto-valor com parte real positiva a amplitude da resposta do sistema linearizado deve crescer com o tempo.

O valor de v para o qual $\lambda(\pm\Lambda_1) = \lambda(\pm\Lambda_2) = \pm bi$, $\psi(\pm\Lambda_1) = \psi(\pm\Lambda_2)$, define também uma condição crítica do sistema com a mudança qualitativa de comportamento do mesmo. A transição (ponto crítico) é caracterizada por uma resposta que cresce linearmente com o tempo:

$$\eta(\chi, \tau) = \psi(\chi) (A + B\tau) e^{ibt}$$

Convém observar que nesta situação ocorre a coincidência de duas auto-funções originariamente distintas envolvendo uma superposição de modos de vibração (na descrição qualitativa apresentada-1º e 2º modos). Este ponto precede a ocorrência de "coupled mode flutter" terminologia empregada por Paidoussis [6].

b) Viga em balanço

No caso do tubo em balanço a análise da variação dos auto-valores λ , a partir do estudo do sinal do discriminante da

equação algébrica,

$$\lambda^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi d\chi + \lambda 2\beta^{1/2} v \int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi + v^2 \int_0^1 \bar{\psi} \psi'' d\chi + \int_0^1 \bar{\psi} \psi''' d\chi = 0 \quad (3.110)$$

torna-se muito complexo, já que neste problema as condições de contorno não mais se anulam no bordo livre ($\chi = 1$).

Mesmo assim, algumas conclusões de ordem geral podem ser formuladas usando-se esta equação. Assim, por exemplo, verifica-se que a ocorrência do auto-valor λ não implica na existência do auto-valor $(-\lambda)$, ou seja: no caso de raízes reais ou complexas não se deve esperar que as mesmas sejam simétricas.

Além disso como o coeficiente de λ na eq. (3.110)

$$\int_0^1 \bar{\psi} \psi' d\chi = \frac{1}{2} [u^2(1) + w^2(1)] + i \int_0^1 (uw' - wu') d\chi \quad (3.111)$$

é um número complexo com parte real positiva, por um desenvolvimento idêntico àquele utilizado na obtenção da equação (3.118), conclui-se que para v suficientemente pequeno os auto-valores devem ser complexos com parte real negativa, implicando numa resposta amortecida. Aumentando-se o valor de v é possível chegar-se à situação em que para algum modo (modos isolados) ocorra "flutter" ($\text{Re} \lambda > 0$). Neste caso o modelo linear prevê uma resposta crescendo ilimitadamente com o tempo.

Esta análise está de acordo com a equação (3.98):

$$\frac{dH}{dt} = -\rho A_f [\dot{\xi} \dot{u}_2^2(L) + \dot{\xi}^2 u_2'(L) \dot{u}_2(L)] \quad (3.98)$$

O primeiro termo é sempre positivo e o segundo é indefinido. En

tretanto para pequenos valores de $\dot{\xi}$ (e portanto de v) é possível que o primeiro termo domine o segundo. Nesta situação, em cada período de vibração, energia será retirada do sistema, razão pela qual deve-se esperar soluções que tendem a zero com o tempo. À medida que $\dot{\xi}$ cresce, inverte-se esta tendência (isto é energia é adicionada ao sistema) implicando numa amplificação da resposta.

3.7. Conclusões

- Formulação do problema

A utilização do princípio dos trabalhos virtuais, para a formulação do problema, foi particularmente interessante neste caso não apenas por possibilitar mais diretamente a obtenção de soluções aproximadas (objetivo deste trabalho), mas também por permitir tratar de forma adequada a ação do fluido sobre o tubo, restringindo-se apenas às partículas de fluido que estão no interior do tubo. Além disto as expressões do hamiltoniano, do lagrangiano e do princípio de Hamilton, aplicáveis a este problema, foram obtidas a partir do P.T.V., interpretando-se convenientemente o conceito de espaço das variações admissíveis. Por último, a extensão dessa formulação, para a solução do problema não-linear, via forma incremental do P.T.V. é praticamente automática.

- Resposta não-linear

A utilização da descrição lagrangiana atualizada da forma incremental do P.T.V. mostrou ser a mais conveniente, já que ao se atualizar a cada instante a configuração de referência, automaticamente leva-se em consideração a condição de ser o fluxo sempre tangencial ao tubo.

- Vibrações livres

A obtenção do hamiltoniano e do lagrangiano do sistema

permitiu caracterizar o comportamento físico do modelo. Mostrou-se que no caso do tubo em balanço o sistema é não conservativo e obteve-se explicitamente a expressão da força não conservativa gerada pelo escoamento do fluido. No caso de tubos com extremidades fixas esta força não existe, as forças de Coriolis provenientes do escoamento não realizam trabalho, e quando o escoamento se processa a velocidade constante o hamiltoniano também é constante no tempo, e o comportamento do sistema assemelha-se ao de um sistema giroscópico conservativo.

A utilização do quociente de Rayleigh, para a análise dos auto-valores associados ao problema de vibrações lineares autônomas, permitiu estudar qualitativamente o comportamento desses auto-valores com o parâmetro velocidade de escoamento, concluindo-se que:

a) Tubos com extremidades impedidas

- i) Os auto-valores ocorrem sempre em pares simétricos (característica de sistemas holonômicos conservativos).
- ii) Não ocorre bifurcação no espectro de frequências do problema estacionário ($v=0$). Isso não é verdade no caso geral de sistemas elásticos giroscópicos.
- iii) Para $v < 1^{\text{a}}$ velocidade crítica todos os auto-valores são imaginários puros.
- iv) A velocidade de escoamento sempre causa distorção nos modos normais de vibração e para $v > 1^{\text{a}} v_c$ sempre ocorre coincidência de auto-valores originariamente distintos e superposição dos seus modos.
- v) Entendendo-se as condições iniciais como significando pe-

quenas perturbações sobre a posição de equilíbrio, de acordo com o conceito de Liapunov, pode-se afirmar que para $v > 1^a v_c$ a posição de equilíbrio é sempre instável.

b) Tubo em balanço

- i) No caso geral os auto-valores não são simétricos.
- ii) Para v suficientemente pequeno todos os auto-valores têm parte real negativa.
- iii) Para v suficientemente pequeno a posição de equilíbrio é assintoticamente estável.

CAPÍTULO IV
SOLUÇÕES APROXIMADAS

4.1. Introdução

Exaustivamente no decorrer deste trabalho tem se chama do a atenção para a grande dificuldade na obtenção de soluções "fechadas", restando portanto a alternativa da busca de soluções aproximadas, ou seja, soluções \underline{u}^h , definidas num espaço "apropriado" \mathcal{V}^h de dimensão finita. Formalmente:

$$\underline{u}^h \in \mathcal{V}^h \quad \mathcal{V} \equiv H^1 \times H^2$$

$$\underline{u}^h = \sum_{j=1}^n D_j \underline{f}_j(s) \quad ; \quad s \in [0, L] \quad (4.1a-c)$$

$$\mathcal{V}^h \equiv \text{span}\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n\} \quad ; \quad n = n^o \text{ de graus de liberdade}$$

As funções \underline{f}_j , conhecidas como interpolantes globais, definidas em todo o domínio $[0, L]$, devem constituir uma base completa para a geração de \mathcal{V}^h .

Obviamente o que se deseja é que:

$$\underline{u}^h \xrightarrow[n \rightarrow N]{\text{tenda em alguma métrica}} \underline{u} \text{ (solução do problema)}$$

e portanto \underline{u}^h deve satisfazer aproximadamente a equação (3.59), no caso de resposta dinâmica ou a equação (3.80) se se trata de estabilidade. O método dos elementos finitos permite construir de forma sistemática as interpolantes globais, a partir de funções de interpolação definidas localmente em cada elemento. Neste trabalho utiliza-se o elemento finito de "pórtico plano", com

dois nós e três graus de liberdade por nó (figura 4.1)

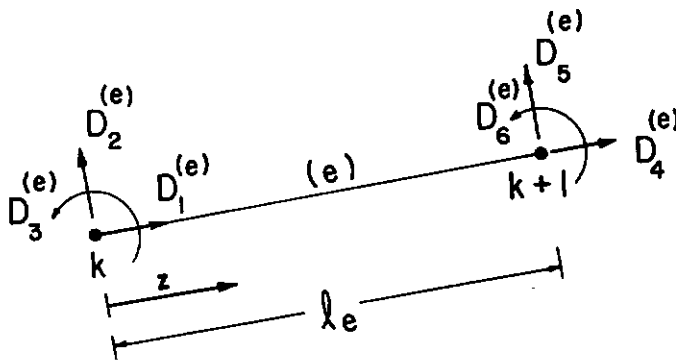


Fig. 4.1 - Elemento finito adotado

Em cada elemento finito os deslocamentos são interpolados por:

$$\underline{u}^{(e)}_h = \sum_{j=1}^6 \underline{f}_j^{(e)} D_j^{(e)} \quad (4.2)$$

onde as funções $\underline{f}_j^{(e)}$ são tais que:

$$\underline{f}_{3\ell-2}^{(e)} = \begin{bmatrix} \Psi_\ell \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{f}_{3\ell-1}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{2\ell-1} \end{bmatrix} ; \quad \underline{f}_{3\ell}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{2\ell} \end{bmatrix}$$

$$\ell = 1, 2 \quad (4.3a-c)$$

A equação (4.2) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\underline{u}^{(e)}_h = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \cdot \underline{D}^{(e)} \quad (4.4)$$

$\underline{D}^{(e)}$ é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados do elemento (e), $\Psi_\ell (\ell=1,2)$ são polinômios lineares e $\Phi_\ell (\ell=1,2,3,4)$ são

os polinômios cúbicos de Hermite.

De acordo com as equações anteriores, as interpolantes globais, associadas a um nó genérico k serão:

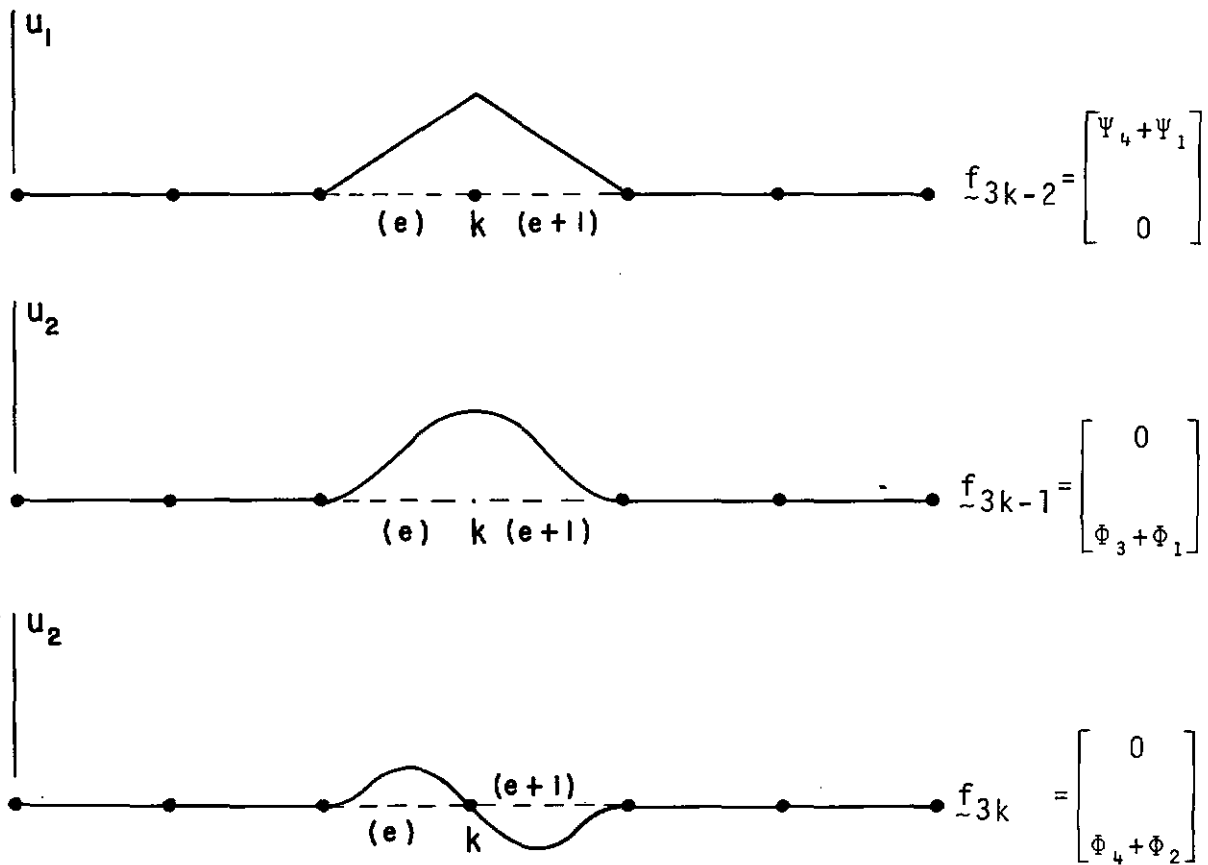


Fig. 4.2 - Funções de interpolação globais

Estas funções satisfazem às condições de regularidade impostas pela equação (3.59), ou seja:

$$f_{3k-2} \in C^0 \quad (\text{funções contínuas})$$

$$f_{3k-1} \text{ e } f_{3k} \in C^1 \quad (\text{funções com derivadas contínuas})$$

4.2. Resposta Dinâmica

A substituição de (4.1) no funcional (3.59) conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias incrementais de segunda ordem, que podem ser escritas genericamente como:

$$\underset{\sim}{r}_M^{+1} \underset{\sim}{r}_D^{+1} + \underset{\sim}{r}_C^{+1} \underset{\sim}{r}_D^{+1} + \underset{\sim}{r}_K \underset{\sim}{r}_D = \underset{\sim}{r}_R^{+1} - \underset{\sim}{r}_F \quad (4.5)$$

onde: $\underset{\sim}{r}_D^{+1}$ e $\underset{\sim}{r}_D^{+1}$ são respectivamente os vetores de acelerações e velocidades nodais; e $\underset{\sim}{r}_D$ é o vetor dos incrementos de deslocamentos nodais generalizados. $\underset{\sim}{r}_R^{+1}$ é o vetor das cargas nodais externas aplicadas no instante t_{r+1} e $\underset{\sim}{r}_F$ é o vetor das cargas nodais devido:

- i) aos esforços internos (N , M - 2º e 3º termos de (3.59)).
- ii) às ações do fluido dependentes dos deslocamentos (último termo de (3.61)).

A matriz $\underset{\sim}{r}_M^{+1}$ corresponde à matriz de "massa", $\underset{\sim}{r}_K$ é conhecida como matriz de "rigidez tangente" e $\underset{\sim}{r}_C^{+1}$ é denominada matriz de "Coriolis".

Como é usual no M.E.F., as matrizes e vetores que aparecem na equação (4.5) são montados diretamente por soma conveniente das correspondentes matrizes e vetores dos elementos, sem a necessidade de se construir as interpolantes globais.

Assim se se define: (ver eq. 4.4)

$$\begin{aligned} \underline{\Psi} &= [\Psi_1 \quad 0 \quad 0 \quad \Psi_2 \quad 0 \quad 0]^T \\ \underline{\Phi} &= [0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad 0 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]^T, \end{aligned} \quad (4.6a-b)$$

as componentes dos incrementos de deslocamentos ficam dadas por:

$$\begin{pmatrix} e \\ u_s \end{pmatrix} = \underline{\psi}^T \begin{pmatrix} e \\ \underline{D} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} e \\ u_n \end{pmatrix} = \underline{\phi}^T \begin{pmatrix} e \\ \underline{D} \end{pmatrix} \quad (4.7a-b)$$

que substituídas em (3.59) conduzem a:

$$r_{\underline{M}}^{+1} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} e \\ \underline{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ \underline{m}_f \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} \mu A (\underline{\psi} \underline{\psi}^T + \underline{\phi} \underline{\phi}^T) dz$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{m}_f \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} \rho A_f \underline{\phi} \underline{\phi}^T dz$$

$$r_{\underline{C}}^{+1} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e \\ \underline{c}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{c}_f \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} 2\rho A_f \xi \underline{\phi} \underline{\phi}_{,z}^T dz \quad (4.8a-i)$$

$$r_{\underline{K}} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_f \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_e \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} (EA \underline{\psi}_{,z} \underline{\psi}_{,z}^T + EI \underline{\phi}_{,zz} \underline{\phi}_{,zz}^T) dz$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_g \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} \begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}^T \frac{1}{r^N} \underline{\phi}_{,z} \underline{\phi}_{,z}^T dz$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \underline{k}_f \end{pmatrix} = \int_0^{\xi_e} \rho A_f [\dot{\xi}^2 \underline{\phi} \underline{\phi}_{,zz}^T + \ddot{\xi} \underline{\phi} \underline{\phi}_{,z}^T] dz + \\ + \int_0^{\xi_e} A_f \left[\begin{pmatrix} e \\ \underline{p} \end{pmatrix}_{,z} \underline{\phi} \underline{\phi}_{,z}^T + \begin{pmatrix} e \\ \underline{p} \end{pmatrix} \underline{\phi} \underline{\phi}_{,zz}^T \right] dz$$

Nas expressões anteriores $\begin{pmatrix} e \\ \underline{r} \end{pmatrix}$ é a matriz de rotação do elemento,

(e) p é a função que define localmente a pressão e ξ_e , $0 \leq \xi_e \leq l_e$, é uma abscissa que identifica a cada instante a posição da frente de fluido em cada elemento (e). Se este elemento está cheio de fluido $\xi_e = l_e$.

4.2.1. Integração numérica

A solução incremental de equações diferenciais não-lineares exige obviamente a utilização de um algoritmo de integração tipo "step-by-step" para a obtenção da resposta do sistema. Ressalta-se aqui, entretanto, que mesmo no caso linear, desde que se esteja analisando a situação de escoamento transiente, as matrizes:

$$\begin{matrix} (e) \\ m_f \end{matrix} ; \begin{matrix} (e) \\ c_f \end{matrix} \text{ e } \begin{matrix} (e) \\ k_f \end{matrix}$$

são funções do tempo (implícitas no caso de tubos enchendo e explícitas se $\xi = f(t)$) e portanto torna-se indispensável o uso de um esquema numérico tipo passo-a-passo, para a integração no tempo.

Neste trabalho utiliza-se o algoritmo de Newmark [34] o qual foi desenvolvido originariamente para a integração de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem. Como para estes problemas o operador de aproximação é consistente e estável (na realidade ele é incondicionalmente estável), de acordo com o teorema de Lax [76] ele é convergente. Como no problema que está sendo estudado, a solução não-linear é obtida por uma sequência de linearizações (onde portanto este operador é incondicionalmente estável), é razoável esperar-se que também nesta situação o algoritmo de Newmark seja convergente.

De acordo com o procedimento usual deste método, as velocidades e acelerações são aproximadas em cada intervalo Δt de tempo por:

$$\dot{\tilde{r}}_D^{r+1} = \frac{2}{\Delta t} \tilde{r}_D^r - \dot{\tilde{r}}_D^r$$

$$\ddot{\tilde{r}}_D^{r+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \tilde{r}_D^r - \frac{4}{\Delta t} \dot{\tilde{r}}_D^r - \ddot{\tilde{r}}_D^r \quad (4.9a-b)$$

Substituindo-se estas expressões em (4.5) chega-se a um sistema de equações algébricas:

$$\left[\frac{4}{\Delta t^2} \tilde{r}_M^{r+1} + \frac{2}{\Delta t} \tilde{r}_C^{r+1} \tilde{r}_K^r \right] \tilde{r}_D^r = \tilde{r}_R^{r+1} - \tilde{r}_F^r + \tilde{r}_C^{r+1} \dot{\tilde{r}}_D^r + \tilde{r}_M^{r+1} \left[\frac{4}{\Delta t} \dot{\tilde{r}}_D^r + \ddot{\tilde{r}}_D^r \right] \quad (4.10)$$

cuja solução fornece os incrementos de deslocamento \tilde{r}_D^r entre dois instantes próximos t_r e $t_{r+1} = t_r + \Delta t$. O conhecimento do vetor \tilde{r}_D^r juntamente com as equações (4.9a-b) e a relação incremental:

$$\tilde{r}_D^{r+1} = \tilde{r}_D^r + \tilde{r}_D^r \quad (4.11)$$

permite avançar a solução no tempo.

4.2.2. Iteração de equilíbrio

Convém observar que a equação (4.5) é apenas uma aproximação da equação do movimento entre os instantes t_r e t_{r+1} , e que portanto, dependendo da não-linearidade do sistema, bem como do passo de integração, a solução aproximada pode afastar-se sensivelmente da solução "real" do problema. É possível, obter-se melhores aproximações para os incrementos de deslocamentos, se em cada instante de tempo são feitas iterações e testes de equilíbrio. Um esquema iterativo proposto por [74] consiste em man-

ter constante a matriz de rigidez tangente, atualizando em cada iteração as acelerações, velocidades e o vetor \underline{r}_F que depende da configuração do corpo (está se supondo que as forças externas que originam o vetor \underline{r}_R^{+1} são conservativas, o que não ocorre com o vetor \underline{r}_F que depende dos esforços internos (N,M) e das ações geradas pelo escoamento do fluido).

Assim, definindo-se para cada iteração k:

$$\underline{r}_D^{(k)} = \underline{r}_D^{(k-1)} + \Delta \underline{D}^{(k)} \quad (4.12)$$

onde $\Delta \underline{D}^{(k)}$ representa a correção sobre o incremento de deslocamento $\underline{r}_D^{(k-1)}$, e tal que para k = 1:

$$\begin{aligned} \underline{r}_D^{(0)} &= \underline{r}_D ; \quad \underline{r}_D^{(1)} = \underline{r}_D^{(0)} ; \quad \underline{r}_D^{(1)} = \underline{r}_D^{(0)} ; \\ \underline{r}_F^{(0)} &= \underline{r}_F \end{aligned} \quad (4.13)$$

chega-se a um esquema iterativo do tipo:

$$\begin{aligned} \underline{r}_K \Delta \underline{D}^{(k)} &= \underline{r}_R^{+1} - \underline{r}_F^{(k-1)} - \underline{r}_M^{+1} \underline{r}_D^{(k)} - \\ &\quad - \underline{r}_C^{+1} \underline{D}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

cujas soluções fornecem a k-ésima correção sobre os incrementos de deslocamentos. Convergência é atingida quando

$$\|\Delta \underline{D}^{(k)}\| \leq \text{tolerância} \quad (4.15)$$

As equações (4.10) e (4.14) serão utilizadas para o cálculo da resposta dinâmica do sistema.

4.3. Estabilidade Infinitesimal

A utilização da interpolação local:

$$\begin{pmatrix} e \\ u_2 \end{pmatrix} = \underline{\Phi}^T \begin{pmatrix} e \\ D \end{pmatrix} ; \quad \underline{\Phi} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]^T \quad (4.16a-b)$$

onde Φ_ℓ ($\ell=1,2,3,4$) são os polinômios cúbicos de Hermite, sobre a forma integral (3.80), e o uso da montagem padrão do M.E.F., conduz à obtenção do sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$\underline{M}\ddot{\underline{D}} + \underline{\xi}\underline{C}\dot{\underline{D}} + (\underline{K}_0 + \underline{\xi}^2 \underline{K}_1 + \underline{\xi}\underline{K}_2) \underline{D} = \underline{0} \quad (4.17)$$

que corresponde a forma discreta da equação de perturbação.

As matrizes globais \underline{M} , \underline{C} , \underline{K}_0 , \underline{K}_1 e \underline{K}_2 são obtidas por soma conveniente das matrizes dos elementos, sendo dadas por:

$$\underline{M} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ m \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ m \end{pmatrix} = \int_0^\ell e^{(\mu A + \rho A_f)} \underline{\Phi} \underline{\Phi}^T dz$$

$$\underline{C} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ c \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ c \end{pmatrix} = \int_0^\ell e^{2\rho A_f} \underline{\Phi} \underline{\Phi}_z^T dz$$

$$\underline{K}_0 = \underline{K}_{01} + \underline{K}_{02} + \underline{K}_{03} + \underline{K}_{04}$$

$$\underline{K}_{01} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ k_{01} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ k_{01} \end{pmatrix} = \int_0^\ell e^{EI} \underline{\Phi}_{,zz} \underline{\Phi}_{,zz}^T dz$$

$$\underline{K}_{02} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ k_{02} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ k_{02} \end{pmatrix} = - \int_0^\ell e^{(\mu A + \rho A_f)} g h(z) \underline{\Phi}_{,z} \underline{\Phi}_{,z}^T dz$$

$$\underline{K}_{03} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ k_{03} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ k_{03} \end{pmatrix} = - \int_0^\ell e^{(A_f p^* + N^*)} \underline{\Phi}_{,z} \underline{\Phi}_{,z}^T dz$$

$$\underline{K}_{04} \rightarrow \begin{pmatrix} Ne \\ k_{04} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} Ne \\ k_{04} \end{pmatrix} = (N^* + A_f p^*) \underline{\Phi}(\ell_e) \underline{\Phi}_{,z}^T(\ell_e)$$

$$\underline{K}_1 \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} e \\ k_1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} e \\ k_1 \end{pmatrix} = \int_0^\ell e^{\rho A_f} \underline{\Phi} \underline{\Phi}_{,zz}^T dz$$

$$\underline{K}_2 = \underline{K}_{21} + \underline{K}_{22} \quad (4.18a-k)$$

$$\underline{K}_{21} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} (e) \\ \underline{k}_{21} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} (e) \\ \underline{k}_{21} \end{pmatrix} = - \int_0^L \rho A_f \begin{pmatrix} (e) \\ h(z) \end{pmatrix} \Phi_{,z} \Phi_{,z}^T dz$$

$$\underline{K}_{22} \rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \begin{pmatrix} (e) \\ \underline{k}_{22} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} (e) \\ \underline{k}_{22} \end{pmatrix} = \int_0^L \rho A_f \underline{\Phi} \underline{\Phi}_{,z}^T dz$$

onde $\begin{pmatrix} (e) \\ h(z) \end{pmatrix}$ é uma função que define localmente, para o elemento (e) , a função global $(L-X_1)$.

Essas matrizes apresentam as seguintes propriedades:

- i) $\underline{M} = \underline{M}^T$ - matriz real, simétrica e positiva definida
- ii) $\underline{K}_{01} = \underline{K}_{01}^T$ - matriz real, simétrica e positiva definida
- iii) $\underline{K}_{02} = \underline{K}_{02}^T$; $\underline{K}_{03} = \underline{K}_{03}^T$; $\underline{K}_{21} = \underline{K}_{21}^T$ - matrizes reais simétricas e negativas definidas (N^*, p^*, g - positivos).

Quando o tubo está restringido contra deslocamentos transversais:

- iv) $\underline{K}_{04} = 0$
- v) $\underline{C} = -\underline{C}^T$ - matriz real e antissimétrica
- vi) $\underline{K}_1 = \underline{K}_1^T$ - matriz real, simétrica e negativa definida
- vii) $\underline{K}_{22} = -\underline{K}_{22}^T$ - matriz real e antissimétrica
- viii) $\underline{K}_0 = \underline{K}_0^T$ - matriz real e simétrica

4.3.1. Estabilidade em sistemas discretos

O sistema de equações diferenciais lineares (4.17) representa a forma discreta da equação de perturbação (3.76). Será em função do comportamento da solução $\underline{D} = \underline{0}$ de (4.17) que se

pretende julgar a estabilidade da solução trivial das equações de perturbação não-lineares (eqs. 3.72c-b). É portanto conveniente neste ponto apresentar alguns resultados sobre estabilidade em sistemas discretos.

4.3.1.1. Equações variacionais

O movimento de um sistema dinâmico com n graus de liberdade pode sempre ser descrito por um conjunto de $2n$ equações diferenciais de 1.^a ordem, da forma:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{Y}(\underline{y}, t) \quad (4.19)$$

Assume-se que as funções $Y_{\ell} (\ell=1, 2, \dots, 2n)$ estão convenientemente definidas num domínio \mathcal{D} de:

$$\mathbb{R}^{2n} \times [0, t) - \text{espaço movimento,}$$

e que satisfazem neste domínio as condições de Lipschitz, isto é:

$$\|\underline{Y}(\underline{y}_1, t) - \underline{Y}(\underline{y}_2, t)\| < \kappa \|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\| \quad ; \quad \forall (\underline{y}_1, t), (\underline{y}_2, t) \in \mathcal{D}$$

garantindo [81] que (4.19) tem solução única:

$$\underline{y}(t) = \underline{y}^*(\underline{y}_0^*, t) \quad (4.20)$$

Seja então \underline{y}^* o movimento sobre o qual se está interessado no estudo da estabilidade, e seja \underline{y}^* , solução de (4.19) na vizinhança de \underline{y}^* , o movimento perturbado, isto é:

$$\underline{y}^* = \underline{y}^* + \underline{w} \quad (4.21)$$

onde \underline{w} é a perturbação.

Assim de acordo com (4.19):

$$\dot{\underline{w}} = \underline{Y}(\underline{y}^* + \underline{w}, t) - \underline{Y}(\underline{y}^*, t) \quad (4.22)$$

que admite a solução trivial $\underline{w} = \underline{0}$. Com essa transformação de coordenadas, o estudo da estabilidade de \underline{y}^* recai no estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $\underline{w} = \underline{0}$.

Se se expande (4.22) em torno de $\underline{w} = \underline{0}$, vem:

$$\dot{\underline{w}} = \underline{A}(t)\underline{w} + \underline{\varepsilon}(\underline{w}, t) \quad (4.23)$$

onde $A_{ij} = \left. \frac{\partial Y_i}{\partial y_j} \right|_{y_i = y_i^*}$; $i, j = 1, 2, \dots, 2n$

e $\underline{\varepsilon}(\underline{w}, t)$ envolve potências de segunda e de ordens superiores nas variáveis y_i .

Em diversas situações se está interessado no estudo da estabilidade de \underline{y}^* , a pequenas perturbações nas condições iniciais (estabilidade infinitesimal). Se se considera que essas perturbações são suficientemente pequenas, de forma que os termos de segunda ordem em w_i possam ser desprezados em (4.23), chega-se a um sistema de equações:

$$\dot{\underline{w}} = \underline{A} \underline{w} \quad , \quad (4.24)$$

conhecidas como equações variacionais de Poincaré.

- Sistemas canônicos

Um tipo especial de equação variacional surge quando se estuda o movimento de um sistema holonômico de partículas sujeito a forças conservativas. Neste caso as equações de Lagrange são da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n \quad (4.25)$$

onde L é o lagrangiano e q_k e \dot{q}_k são respectivamente as coorde-

nadas e as velocidades generalizadas.

Se se define agora a variável:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (\text{momentum generalizado}) \quad (4.26)$$

e se for possível estabelecer a função $H = H(p, q, t) \rightarrow$ hamiltoniano, definida por:

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (4.27)$$

as n equações (4.25) podem ser escritas como um sistema de $2n$ equações diferenciais de 1.^a ordem, da forma:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (4.28a-b)$$

conhecidas como equações canônicas de Hamilton.

Usando-se agora a transformação:

$$y_k = q_k \quad ; \quad y_{k+n} = p_k \quad (4.29)$$

escreve-se:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{Z} \frac{\partial H}{\partial \underline{y}} \quad (4.30)$$

onde:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{\Pi} \\ -\underline{\Pi} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

é uma matriz antissimétrica de ordem $2n$.

E por um desenvolvimento análogo ao usado no início desta seção, obtem-se a equação variacional.

$$\dot{\underline{w}} = \underline{Z} \frac{\partial H}{\partial \underline{w}} \quad (4.32)$$

onde \mathcal{H} é uma matriz simétrica, conhecida como matriz hessiana, dada por:

$$\mathcal{H}_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{y_i = y_i^*} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

Se se compara (4.33) com (4.24) vê-se que neste caso o operador A tem a forma:

$$A = Z \mathcal{H} \quad (4.34)$$

4.3.1.2. Teorema de Liapunov sobre a estabilidade da 1.^a aproximação

Obtidas as equações variacionais, a questão que se coloca agora é saber quando a estabilidade da solução trivial do sistema linearizado (eq. variacional) implica em estabilidade da solução trivial do correspondente sistema não-linear. Enuncia-se para tanto o teorema de Liapunov [57].

- Teorema I

Se o sistema de equações variacionais possui comportamento significativo, então as características de estabilidade da aproximação linear são essencialmente as mesmas do sistema completo de equações não-lineares.

Por outro lado, se o sistema variacional apresenta comportamento crítico (não significativo), a análise da estabilidade baseada na aproximação linear é inconclusiva e os termos de ordem superior, que ocorrem na equação não-linear, devem ser considerados.

Apresenta-se a seguir alguns resultados sobre estabilidade de equações diferenciais lineares, caracterizando em cada

caso, quando o sistema apresenta comportamento significativo ou não.

4.3.1.3. Estabilidade de sistemas lineares autônomos

Seja o sistema:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A} \underline{y} \quad (4.35)$$

onde os elementos A_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 2n$) de \underline{A} são constantes no tempo. Se todos os auto-valores λ_j de \underline{A} são diferentes, então:

$$\det[\underline{A} - \lambda \underline{I}] = \prod_{j=1}^{2n} (\lambda_j - \lambda)$$

Se por outro lado existe uma raiz repetida λ_i , a equação anterior toma a forma:

$$\det[\underline{A} - \lambda \underline{I}] = (\lambda_i - \lambda)^{m_i} P_i(\lambda)$$

onde $(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ é um divisor elementar do polinômio característico. $P_i(\lambda)$ é tal que $P_i(\lambda_i) \neq 0$. O inteiro m_i é chamado multiplicidade de λ_i e o número n_i , de auto-vetores linearmente independentes associados com λ_i , é conhecido como nulidade de λ_i . Em geral $n_i \leq m_i$; e se $m_i = n_i$ então $(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ é um divisor elementar simples.

No caso de sistemas lineares autônomos a estabilidade de (4.35) é julgada a partir dos auto-valores do operador \underline{A} , podendo-se afirmar que:

- Teorema II

1) Se todos os auto-valores de \underline{A} têm parte real negativa, o sistema é assintoticamente estável, ou seja, todas as soluções de (4.35) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

2) Se todos os auto-valores de \underline{A} têm parte real não positiva, porém algum dos auto-valores têm parte real nula o sistema possui comportamento crítico. Se os divisores elementares correspondentes aos auto-valores com parte real nula são todos simples então o sistema é estável (solução limitada).

3) Se ao menos um dos auto-valores de \underline{A} tem parte real positiva o sistema é instável, isto é, alguma solução de (4.35) cresce ilimitadamente quando $t \rightarrow \infty$.

Os sistemas para os quais as afirmativas 1 e 3 são válidas exibem comportamento significativo. Assim, de acordo com o teorema de Liapunov, se (4.24) é a equação variacional de algum sistema não-linear, as situações (1) e (3) são suficientes para se inferir conclusões sobre a estabilidade ou instabilidade desse sistema.

Observação - No caso de sistemas redutíveis à forma canônica (eq. 4.30), desde que a matriz hessiana seja constante no tempo, pode-se provar [57] que se λ_j é um auto-valor do sistema variacional (eq. 4.34) então $(-\lambda_j)$ é também um auto-valor. Portanto, de acordo com o teorema anterior, estabilidade só é possível quando todas as raízes λ_j são imaginários puros. Mas nesta situação o sistema variacional possui comportamento crítico e portanto os termos não-lineares terão que ser considerados.

4.3.1.4. Sistemas lineares com coeficientes periódicos

Seja agora o sistema:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A}(t) \underline{y} \quad (4.36)$$

onde os elementos $A_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2, \dots, 2n$) de \underline{A} são funções periód-

dicas contínuas de t , com período T , isto é:

$$\underline{A}(t+T) = \underline{A}(t) \quad (4.37)$$

Se se define $\underline{G}(t) = [\underline{y}_1^*, \underline{y}_2^* \dots \underline{y}_{2n}^*]$ como a matriz fundamental de (4.36), escreve-se:

$$\dot{\underline{G}}(t) = \underline{A}(t) \underline{G}(t) \quad (4.38)$$

e obviamente:

$$\dot{\underline{G}}(t+T) = \underline{A}(t+T) \underline{G}(t+T) \quad (4.39)$$

e da periodicidade de \underline{A} , vem:

$$\dot{\underline{G}}(t+T) = \underline{A}(t) \underline{G}(t+T), \text{ isto é:} \quad (4.39a)$$

$\underline{G}(t+T)$ é também uma matriz fundamental de (4.36) e portanto pode ser escrita como uma combinação linear de $\underline{G}(t)$, ou seja:

$$\underline{G}(t+T) = \underline{J} \underline{G}(t) \quad (4.40)$$

\underline{J} é uma matriz constante não singular, cujos elementos J_{ij} são os coeficientes da expansão de $\underline{G}(t+T)$ no espaço solução $\underline{G}(t)$.

A partir da equação anterior pode-se afirmar que: [57], [81]

- Teorema III

1) Se todos os λ_j ($j=1,2,\dots,2n$) auto-valores de \underline{J} têm $|\lambda_j| < 1$ o sistema é assintoticamente estável.

2) Se todos os λ_j auto-valores de \underline{J} têm $|\lambda_j| \leq 1$ o sistema possui comportamento crítico. Se os divisores elementares correspondentes aos auto-valores com $|\lambda_j| = 1$ são simples todas as soluções do sistema são limitadas quando $t \rightarrow \infty$.

3) Se para algum λ_j tem-se $|\lambda_j| > 1$ então alguma solução

de (4.36) cresce ilimitadamente com o tempo (sistema instável).

4) O sistema (4.36) tem uma solução periódica de período T se e somente se existe ao menos uma raiz $\lambda_j = 1$. Se $\lambda_j = -1$ a solução terá período $2T$.

Observação - No caso de sistemas canônicos, se a matriz \mathbb{B} (eq. 4.34) é periódica, pode-se afirmar que neste caso [57] se λ_j é um valor característico de \underline{J} , λ_j^{-1} também o será. Além disso como \underline{J} é uma matriz real, se existir um auto-valor complexo existirá também o seu complexo conjugado.

A grande dificuldade no tratamento da estabilidade de sistemas lineares periódicos, segundo a teoria de Floquet, recai na necessidade da obtenção da matriz monodrômica \underline{J} , o que obviamente não é uma tarefa simples. Uma forma de superar esta dificuldade consiste em utilizar métodos aproximados de cálculo na geração da matriz \underline{J} .

- Integração numérica da equação (4.36) para um conjunto completo de condições iniciais. Isto é, para cada condição inicial, (4.36) é integrada em um período T . O vetor solução assim obtido constituirá uma coluna de \underline{J} [57]. Assim de acordo com (4.40) e fazendo-se:

$$\underline{G}(0) = \underline{I} \quad \underline{J} = \underline{G}(T)$$

- Aproximação do operador $\underline{A}(t)$. Na referência [83], esta técnica é utilizada discretizando o operador \underline{A} em operadores seccionalmente constantes (função escada).

Os métodos, acima descritos, são úteis quando se deseja verificar se determinado sistema é ou não estável. Entretanto se se quer obter as regiões de estabilidade, essas técnicas tornam-se pouco eficientes, já que envolveriam um grande número de ite

rações para a obtenção das fronteiras dessas regiões. Além disso convém observar que estes métodos envolvem uma integração aproximada de (4.36). A partir daí os auto-valores de \underline{J} são calculados verificando-se então a estabilidade do sistema. Dessa forma, deve-se ter garantida uma grande precisão nessa integração, o que dificulta ainda mais o uso destes métodos, principalmente em sistemas com grande número de graus de liberdade.

Um outro enfoque que permite determinar diretamente as fronteiras das regiões de instabilidade, sem a necessidade da obtenção da matriz \underline{J} , baseia-se no fato de que soluções periódicas "separam" soluções ilimitadas de soluções limitadas. Este método consiste portanto em determinar sob que condições tais soluções periódicas existem, e como se verá posteriormente, corresponde a uma generalização do tratamento das equações de Mathieu Hill.

Estas equações têm a forma geral:

$$\ddot{q} + \Omega^2(1+2\epsilon\phi(t))q = 0 \quad (4.42)$$

com $\phi(t+T) = \phi(t)$; $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Ω e ϵ podem ser vistos como parâmetros que refletem as propriedades do sistema (para $\epsilon=0$, Ω é a frequência fundamental de um oscilador harmônico simples).

Com uma transformação de coordenadas, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= \underline{A}(t) \underline{y} \\ \underline{y} &= \begin{bmatrix} \dot{q} & q \end{bmatrix}^T \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega^2(1+2\epsilon\phi) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

e se se adota $\underline{G}(0) = \underline{I}$, obtem-se $\underline{J} = \underline{G}(T)$.

Por outro lado pode-se mostrar que [57]:

$$\det \underline{J} = \lambda_1 \lambda_2 = 1,$$

e portanto a equação característica será:

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0, \quad (4.44)$$

onde: $a = J_{11} + J_{22} = G_{11}(T) + G_{22}(T)$.

A equação característica (4.44) permite analisar o comportamento do sistema (4.42), quando se variam os parâmetros Ω e/ou ϵ . Inicialmente observa-se que para $a^2 < 1$, os auto-valores λ_1 e λ_2 são complexos conjugados; e como $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ e pelo Teorema III todas as soluções de (4.42) são limitadas. Se $a^2 > 1$, λ_1 e λ_2 são reais e como $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, uma das raízes terá $|\lambda| > 1$, e portanto a solução é ilimitada. Quando $a^2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e portanto em qualquer dos casos, ao menos uma solução é periódica. Concluindo-se: a região em que os multiplicadores característicos λ_i ($i=1,2$) são reais coincide com a região de instabilidade (soluções ilimitadas). Por outro lado, a região de multiplicadores característicos complexos corresponde à região de estabilidade (soluções limitadas). Mais importante ainda, a fronteira entre estas regiões é caracterizada por soluções periódicas de período T (se $\lambda_{1,2}=1$) e $2T$ (se $\lambda_{1,2}=-1$), isso é facilmente entendido se se observa que a raiz $\lambda = 0$ não pode existir. A representação gráfica (fig.4.3) mostrada, demonstra claramente esta conclusão.

As observações anteriores podem ser sintetizadas na seguinte afirmativa: [18]

- as regiões de soluções ilimitadas são separadas das regiões de

estabilidade, por soluções periódicas de período T e $2T$, ou seja: duas soluções de períodos idênticos limitam a região de instabilidade e duas soluções de períodos diferentes limitam as regiões de estabilidade.

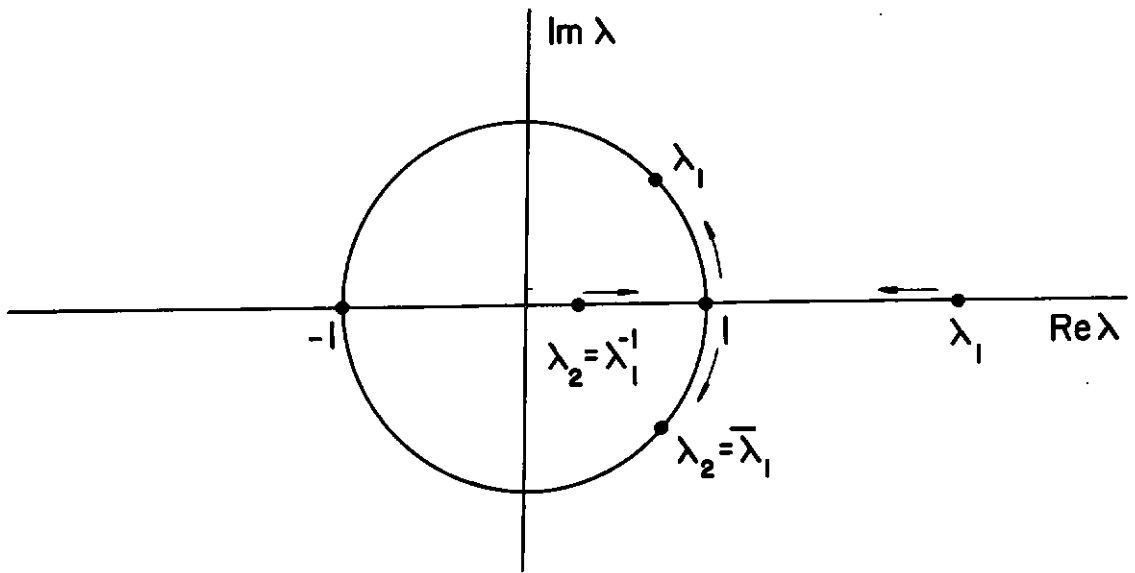


Fig. 4.3 - Comportamento dos multiplicadores característicos

Portanto, fixando-se por exemplo Ω , a caracterização das regiões de instabilidade (ressonância paramétrica) reduz-se ao problema de determinar sob que condições a equação diferencial (4.42) admite soluções periódicas de período T e $2T$. Conforme mostrado em [18], para ϵ pequeno estas regiões se distribuem em torno de:

$$\theta^* = \frac{2\Omega}{k} \quad (4.45)$$

Para $k = 1$ tem-se a região principal de instabilidade e para $k \geq 2$ as regiões secundárias. No plano $\theta \times \epsilon$, sua representação gráfica seria:

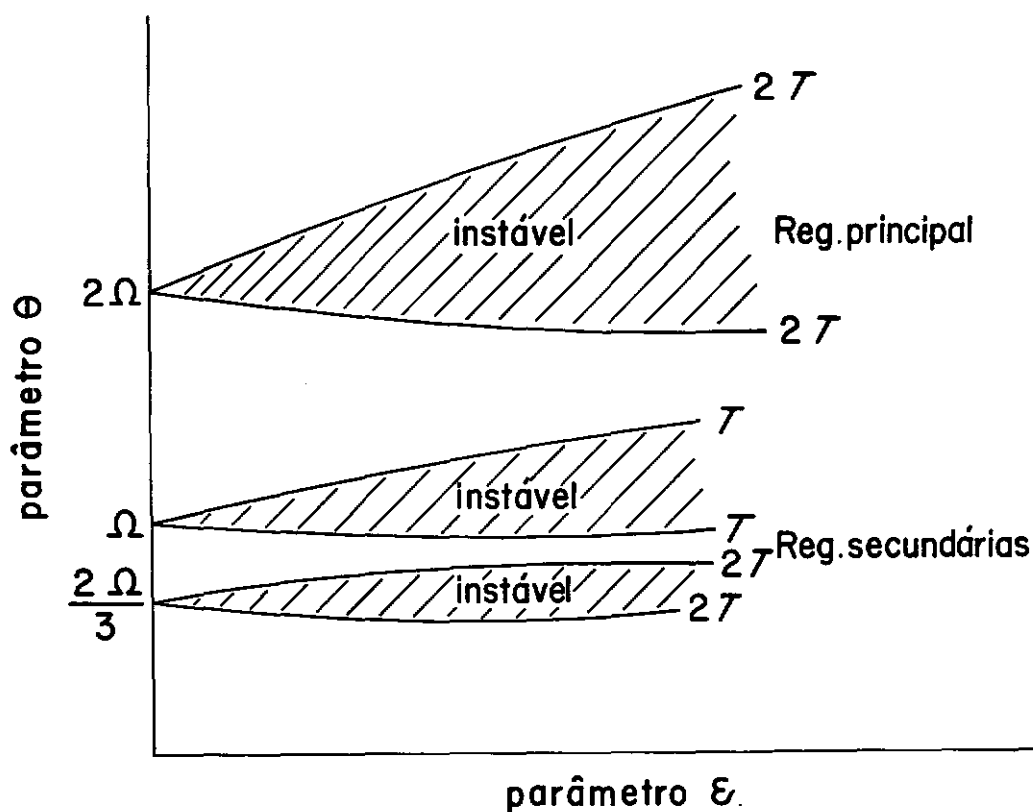


Fig. 4.4 - Regiões de ressonância paramétrica

Estas mesmas idéias podem ser generalizadas [81] para o tratamento de sistemas de equações diferenciais de 2.^a ordem com n graus de liberdade. Considera-se que na forma normal essas equações são expressas por:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A}(t) \underline{y}$$

$$\text{com: } \underline{A}(t) = [\underline{B} + \epsilon \underline{\phi}(t)] \quad (4.46a-b)$$

sendo $\underline{\phi}(t)$ periódico de período $T = 2\pi/\theta$. Suponha-se ainda que a matriz \underline{J} , associada ao operador \underline{A} , é tal que se possa garantir a condição de que existindo o auto-valor λ_i de \underline{J} , existirá também o seu inverso λ_i^{-1} . (já se viu anteriormente que pelo menos no caso de sistemas redutíveis à forma canônica (eq. 4.28) essa

propriedade é válida).

Para a análise da estabilidade da solução trivial $y=0$ (4.46a) vai se considerar apenas o caso em que a cada valor do parâmetro ϵ exista unicamente um par de raízes múltiplas.

Seja então um par genérico de auto-valores λ_i e seu inverso λ_i^{-1} . Considere-se que inicialmente λ_i é real; portanto existirá pelo menos uma solução crescendo ilimitadamente com o tempo. Variando-se as características do sistema pode-se chegar à situação em que $\lambda_i = \lambda_i^{-1} = 1$ ou $\lambda_i = \lambda_i^{-1} = -1$ (raízes múltiplas). No primeiro caso a solução é periódica de período T e no segundo será periódica de período $2T$. Se se continua a variar os coeficientes do sistema, chega-se à situação para a qual λ_i e λ_i^{-1} são complexos conjugados e portanto de módulo igual a 1 (solução limitada).

Assim, a pesquisa de soluções periódicas y_i de (4.46a) permite determinar as fronteiras das regiões de instabilidade por ressonância paramétrica.

Obviamente, o procedimento acima mencionado não permite determinar as regiões de instabilidade, correspondendo às situações de raízes múltiplas diferentes de ± 1 , que correspondem às regiões de ressonância combinatória. Assim, quando ocorrem duas raízes múltiplas, tem-se a situação de ressonância combinatória com relação a duas frequências naturais do sistema. E conforme mostrado em [18] essas regiões se desenvolvem em torno de:

$$\Omega_i \pm \Omega_j = k\theta ; (i, j=1, 2, \dots, 2n) ; k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

Antes de concluir este item, cita-se ainda mais um teorema relativo à equação (4.46a-b): [81]

- Teorema IV

Se \underline{B} é uma matriz constante e se todos os auto-valores de \underline{B} têm parte real negativa, e se $\underline{\phi}(t)$ é uma matriz periódica de período T , então para algum $\epsilon_0 > 0$ e para todo ϵ real ou complexo com $|\epsilon| < \epsilon_0$, todas as soluções de (4.46a) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Os resultados dessa seção serão aplicados ao problema que se está analisando.

4.3.2. Escoamento a velocidade constante

Quando $\dot{\xi} = \text{constante}$ ($\ddot{\xi} = 0$), a equação (4.17) tem coeficientes constantes no tempo, e se se define a transformação:

$$\underline{\tilde{V}} = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{D}} \\ \underline{D} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\dot{\tilde{V}}} = \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{D}} \\ \underline{\dot{D}} \end{Bmatrix} \quad (4.48a-b)$$

obtem-se o sistema de $2n$ equações diferenciais lineares de 1.^a ordem:

$$\underline{\dot{\tilde{V}}} = \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{V}} ; \quad \underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} -\dot{\xi} \underline{M}^{-1} \underline{C} & -\underline{M}^{-1} (\underline{K}_0 + \dot{\xi}^2 \underline{K}_1) \\ \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (4.49a-b)$$

Assim, de acordo com o Teorema II, a estabilidade da solução $\underline{D} = \underline{0}$ de (4.17) será julgada a partir dos auto-valores da matriz $\underline{\tilde{A}}$ (eq. 4.49b). Como a matriz $\underline{\tilde{A}}$ é real pode-se afirmar que auto-valores complexos ocorrem em pares de complexos conjugados.

4.3.2.1. Forma variacional discretizada das equações canônicas de Hamilton

Considere-se inicialmente as situações em que a tubulação tem extremidades impedidas a deslocamentos transversais. As-

sim de acordo com (3.93) e tendo em vista as definições (3.88 a 3.92) a forma discretizada do lagrangiano é:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{D}}^T \underline{M} \dot{\underline{D}} + \frac{1}{2} \dot{\xi} \dot{\underline{D}}^T (\underline{C} + 2\underline{K}_{21}) \underline{D} - \frac{1}{2} \underline{D}^T (\underline{K}_0 + \dot{\xi}^2 \underline{K}_1) \underline{D} \quad (4.50)$$

onde as matrizes globais \underline{M} , \underline{C} , \underline{K}_{21} , \underline{K}_0 e \underline{K}_1 estão definidas em (4.18).

Definindo-se as coordenadas lagrangianas (ver eq.4.25)

$$\underline{q} = \underline{D} \quad ; \quad \dot{\underline{q}} = \dot{\underline{D}} \quad (4.51)$$

e observando-se a equação (4.26), vem:

$$\underline{p} = \underline{M} \dot{\underline{q}} + \frac{1}{2} \dot{\xi} (\underline{C} + 2\underline{K}_{21}) \underline{q} \rightarrow \dot{\underline{q}} = \underline{M}^{-1} [\underline{p} - \frac{1}{2} \dot{\xi} (\underline{C} + 2\underline{K}_{21}) \underline{q}] \quad (4.52a-b)$$

Mas de acordo com (4.27), usando-se (4.50) a (4.52) e a propriedade de simetria das matrizes \underline{M} , \underline{K}_{21} , \underline{K}_0 , \underline{K}_1 e antissimetria de \underline{C} , escreve-se:

$$\begin{aligned} H(\underline{p}, \underline{q}) = & \frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{M}^{-1} \underline{p} - \frac{1}{2} \dot{\xi} \underline{p}^T [\underline{M}^{-1} (\underline{C} + 2\underline{K}_{21})] \underline{q} - \\ & - \frac{1}{8} \dot{\xi}^2 \underline{q}^T [\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} - 4\underline{K}_{21} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21}] \underline{q} - \\ & - \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 \underline{q}^T \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21} \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{q}^T (\underline{K}_0 + \dot{\xi}^2 \underline{K}_1) \underline{q} \end{aligned} \quad (4.53)$$

E finalmente da equação (4.28b), obtem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}} = & - \frac{1}{2} \dot{\xi} [(\underline{C} - 2\underline{K}_{21}) \underline{M}^{-1}] \underline{p} + \frac{1}{4} \dot{\xi}^2 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} \underline{q} + \\ & + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 [\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21} + (\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21})^T] \underline{q} - \\ & - \dot{\xi}^2 \underline{K}_{21} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21} \underline{q} - \underline{K}_0 \underline{q} - \dot{\xi}^2 \underline{K}_1 \underline{q} \end{aligned} \quad (4.54)$$

As equações (4.52b) e (4.54) conduzem a um sistema de $2n$ equações diferenciais de 1.^a ordem, que podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N} & -\frac{1}{2} \dot{\xi} [\underline{M}^{-1} (\underline{C} + 2\underline{K}_{21})]^T \\ -\frac{1}{2} \dot{\xi} \underline{M}^{-1} (\underline{C} + 2\underline{K}_{21}) & \underline{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{N} = & \dot{\xi}^2 \left\{ -\frac{1}{4} \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} - \frac{1}{2} [\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21} + (\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21})^T] + \right. \\ & \left. + \underline{K}_{21} \underline{M}^{-1} \underline{K}_{21} + \underline{K}_1 \right\} + \underline{K}_0 \end{aligned}$$

A equação (4.55) representa a forma variacional procurada, e sua semelhança com a equação (4.32) é óbvia.

A segunda matriz que ocorre nesta equação, e que é simétrica, corresponde à matriz hessiana \mathcal{H} do sistema, cujos elementos \mathcal{H}_{ij} satisfazem (4.33). Assim, pelo que foi visto no item anterior os auto-valores do operador \underline{A} (ver eq. 4.34), deste problema, ocorrem sempre em pares simétricos e portanto de acordo com o Teorema II, estabilidade assintótica não é possível, o que coincide com o resultado apresentado em [27]. Além disso, como essa matriz é real, se λ é um auto-valor complexo, existirão os auto-valores $\bar{\lambda}$, $(-\lambda)$, e $(-\bar{\lambda})$, resultado que já havia sido obtido previamente no capítulo III (eq. 3.120), para uma situação mais particular.

Observa-se outrossim, que a inversão no sentido da velocidade de escoamento não altera as características de estabilidade do sistema (os auto-valores não se modificam).

No caso do tubo em balanço, devido à presença da força

não conservativa (ver eq. 3.99), não é possível escrever-se a equação variacional na forma (4.55), pois neste caso:

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} - Q_k \quad (\text{comparar com a eq. 4.28b})$$

onde Q_k representa genericamente a força não conservativa.

A existência dessas forças não conservativas pode introduzir amortecimento, positivo ou negativo, no sistema e portanto, em certas situações, deve-se esperar que a posição de equilíbrio seja assintoticamente estável.

Resta finalmente esclarecer, que no caso em que a velocidade de escoamento não é mais constante ($\dot{\xi} = f(t)$; $\ddot{\xi} \neq 0$), todas as deduções apresentadas neste item permanecem válidas, a única diferença residindo no fato de que neste caso, o hamiltoniano (eq. 4.53), e a matriz hessiana definida pela eq. (4.55) dependem explicitamente do tempo. Se a velocidade de escoamento é uma função periódica do tempo, a matriz hessiana também o será e portanto é válida a observação referente ao Teorema III.

4.3.3. Escoamento pulsátil

Procurando-se simular o efeito de um bombeamento, vai-se supor que a velocidade de escoamento do fluido é perturbada harmonicamente, segundo:

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0 (1 + \alpha \cos \omega_f t) \quad (4.56)$$

onde $\dot{\xi}_0$ é a velocidade média de escoamento, ω_f representa a frequência do pulso de velocidades e α é a relação entre a amplitude do pulso e a velocidade média. Se se substituir $\dot{\xi}(t)$ e $\ddot{\xi} = d\dot{\xi}/dt$, definidos por (4.56), em (4.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{M}}\underline{D} + \dot{\xi}_0(1 + \alpha \cos \omega_f t) \dot{\underline{C}}\underline{D} + [\underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2(1 + \alpha \cos \omega_f t)^2 \underline{K}_1 - \\ - \dot{\xi}_0 \alpha \omega_f \sin \omega_f t \underline{K}_2] \underline{D} = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

que é um sistema de equações diferenciais de coeficientes periódicos de período $T = 2\pi/\omega_f$.

Conforme explicado no item 4.3.1.4, os valores dos parâmetros, que definem as fronteiras das regiões de ressonância paramétrica, serão calculados determinando-se sob que condições (4.57) admite solução periódica de período T e $2T$. Assim, seguindo-se o método proposto por Bolotin [18], as soluções periódicas de (4.57) são expressas por uma série de Fourier da forma:

$$\underline{D}(t) = \sum_{k=1,2,3..} \underline{A}_k \sin k\omega_f \frac{t}{2} + \sum_{k=0,1,2..} \underline{B}_k \cos k\omega_f \frac{t}{2} \quad (4.58)$$

onde para $k=1,3,5\dots$, \underline{D} tem período $2T$ e para $k=0,2,4\dots$ \underline{D} tem período T .

Substituindo-se (4.58) em (4.57) e agrupando-se os termos de mesmo $\sin k\omega_f t/2$ e $\cos k\omega_f t/2$, chega-se a dois conjuntos infinitos de equações algébricas lineares homogêneas, relacionando ω_f , $\dot{\xi}_0$ e α .

Assim correspondendo a soluções de período $2T$, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{E}_{22} & \underline{E}_{21} & \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{E}_{12} & \underline{E}_{11} & \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{11} & \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{21} & \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \underline{A}_3 \\ \underline{A}_1 \\ \underline{B}_1 \\ \underline{B}_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = 0 \quad (4.59)$$

sendo:

$$\underline{E}_{11} = -\frac{1}{4} \omega_f^2 \underline{M} + \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 (1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}) \underline{K}_1$$

$$\underline{F}_{11} = \frac{1}{4} \omega_f \dot{\xi}_0 (\alpha - 2) \underline{C} - \frac{1}{2} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{G}_{11} = \frac{1}{4} \omega_f \dot{\xi}_0 (\alpha + 2) \underline{C} - \frac{1}{2} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{H}_{11} = -\frac{1}{4} \omega_f \underline{M} + \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 (1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}) \underline{K}_1$$

$$\underline{E}_{22} = -\frac{9}{4} \omega_f^2 \underline{M} + \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 (1 + \frac{\alpha^2}{2}) \underline{K}_1$$

$$\underline{E}_{21} = \frac{1}{4} \dot{\xi}_0^2 \alpha (4 - \alpha) \underline{K}_1 \quad (4.60a-l)$$

$$\underline{F}_{21} = -\frac{1}{4} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{C} - \frac{1}{2} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{F}_{22} = -\frac{3}{2} \omega_f \dot{\xi}_0 \underline{C}$$

$$\underline{F}_{12} = -\frac{3}{4} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{C} + \frac{1}{2} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{H}_{12} = \frac{1}{4} \alpha \dot{\xi}_0^2 (4 + \alpha) \underline{K}_1$$

$$\underline{G}_{21} = \frac{1}{4} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{C} + \frac{1}{2} \omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{E}_{12} = \underline{E}_{21} ; \underline{G}_{12} = -\underline{F}_{12} ; \underline{G}_{22} = -\underline{F}_{22} ;$$

$$\underline{H}_{21} = \underline{H}_{12} ; \underline{H}_{22} = \underline{E}_{22}$$

Semelhantemente para soluções de período T ter-se-ia:

$$\begin{bmatrix}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underline{P}_{22} & \underline{P}_{21} & \underline{Q}_{21} & \underline{Q}_{22} & \underline{Q}_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underline{P}_{12} & \underline{P}_{11} & \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} & \underline{Q}_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underline{R}_{12} & \underline{R}_{11} & \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underline{R}_{22} & \underline{R}_{21} & \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{S}_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underline{R}_{32} & \underline{R}_{31} & \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & \underline{S}_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot \\
 \underline{A}_4 \\
 \underline{A}_2 \\
 \underline{B}_0 \\
 \underline{B}_2 \\
 \underline{B}_4 \\
 \cdot
 \end{bmatrix}
 = \underline{0} \quad (4.61)$$

sendo:

$$\underline{P}_{11} = -\omega_f^2 \underline{M} + \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \underline{K}_1$$

$$\underline{Q}_{11} = -\omega_f \alpha \dot{\xi}_0 \underline{K}_2$$

$$\underline{Q}_{12} = -\omega_f \dot{\xi}_0 \underline{C}$$

$$\underline{R}_{11} = \frac{1}{2} \underline{Q}_{11}$$

$$\underline{S}_{11} = \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \underline{K}_1$$

$$\underline{S}_{12} = \alpha \dot{\xi}_0^2 \underline{K}_1$$

$$\underline{R}_{21} = -\underline{Q}_{12}$$

$$\underline{S}_{21} = 2\underline{S}_{12}$$

$$\underline{S}_{22} = -\omega_f^2 \underline{M} + \underline{K}_0 + \dot{\xi}_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \alpha^2\right) \underline{K}_1 \quad (4.62)$$

Os sistemas (4.59) e (4.61) admitem solução não trivial

quando os determinantes das matrizes dos coeficientes de \underline{A}_k e \underline{B}_k forem nulos. Obviamente isso envolve o cálculo de determinantes que são infinitos e portanto a questão da convergência dos mesmos deve ser considerada. Porém, como está mostrado em [18] esses determinantes pertencem à classe de determinantes normais e portanto são absolutamente convergentes.

Diferentes graus de aproximação são obtidos, a depender do número de termos adotados na expansão de \underline{D} . Assim sendo, uma primeira aproximação consistiria em:

$$\det \begin{bmatrix} \underline{E}_{11} & \underline{F}_{11} \\ \underline{G}_{11} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.63)$$

$$\det \begin{bmatrix} \underline{P}_{11} & \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} \\ \underline{R}_{11} & \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{R}_{21} & \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.64)$$

Arbitrando-se valores para $\dot{\xi}_0$ e α , pode-se determinar os valores de ω_f que satisfazem (4.63) e (4.64) e que definem as regiões de ressonância paramétrica.

Aumentando-se a ordem de aproximação, surgem novas regiões de instabilidade, ao mesmo tempo em que maior precisão nos valores anteriormente calculados é conseguida.

Para a segunda aproximação a equação característica que fornece as fronteiras das regiões de instabilidade será:

$$\det \begin{bmatrix} \underline{E}_{22} & \underline{E}_{21} & \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \\ \underline{E}_{12} & \underline{E}_{11} & \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{G}_{12} & \underline{G}_{11} & \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{G}_{22} & \underline{G}_{21} & \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.65)$$

$$\det \begin{bmatrix} \underline{P}_{22} & \underline{P}_{21} & \underline{Q}_{21} & \underline{Q}_{22} & \underline{Q}_{23} \\ \underline{P}_{12} & \underline{P}_{11} & \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} & \underline{Q}_{13} \\ \underline{R}_{12} & \underline{R}_{11} & \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{R}_{22} & \underline{R}_{21} & \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{S}_{23} \\ \underline{R}_{32} & \underline{R}_{31} & \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & \underline{S}_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.66)$$

As equações (4.63) a (4.65) serão usadas para a determinação das regiões de ressonância paramétrica.

CAPÍTULO V

RESULTADOS NUMÉRICOS E CONCLUSÕES

5.1. Introdução

Com os resultados apresentados no capítulo anterior, têm-se agora as ferramentas necessárias para que sejam analisadas algumas situações de interesse. Os exemplos que serão mostrados a seguir têm a finalidade básica de caracterizar a influência do parâmetro - velocidade de escoamento - sobre a questão da estabilidade e sobre as propriedades vibratórias de tubulações.

A discretização espacial (a menos que seja dito explicitamente o contrário) foi sempre obtida dividindo-se cada vão da tubulação em quatro elementos iguais; e os resultados numéricos estão apresentados em termos dos parâmetros adimensionais definidos no item (3.6.3).

Embora estes resultados refiram-se sempre a tubulações retas, ressalta-se aqui a possibilidade de utilização do programa desenvolvido, na análise de tubulações que se comportam estruturalmente como "pórticos planos".

5.2. Estabilidade infinitesimal

5.2.1. Escoamento a velocidade constante

Visando-se avaliar o comportamento da discretização utilizada, na tabela I, estão apresentados os cinco primeiros valores críticos (α_c) associados à instabilidade elástica ($\gamma=0$), comparando-os com os valores exatos (eq. 3.111a-e).

TABELA I

Viga bi-apoiada		Viga bi-engastada		Viga contínua com dois vãos	
Calculado	Exato	Calculado	Exato	Calculado	Exato
3.142	π	6.306	2π	3.142	π
6.306	2π	9.101	8.987	4.498	4.493
9.580	3π	12.649	4π	6.306	2π
13.856	4π	17.332	15.450	7.786	7.725
17.557	5π	22.691	6π	9.580	3π

Para os primeiros auto-valores verifica-se que a concordância é muito boa e tende a degenerar à medida que os auto-valores crescem. Melhor precisão é conseguida se se utiliza maior número de elementos.

Nas figuras (5.1) a (5.5) estão plotadas as curvas de variação dos auto-valores λ_j do sistema correspondente à equação (4.49a-b), com a velocidade de escoamento adimensional v , para diferentes condições de apoio. A parte imaginária dos auto-valores ($\text{Im}\lambda_j$) está associada à frequência de vibração e a parte real ($\text{Re}\lambda_j$) representa o amortecimento. Os gráficos obtidos são simétricos em relação ao eixo das velocidades, estando traçadas apenas as curvas correspondentes a $\text{Im}\lambda_j > 0$.

Para os tubos apoiados e bi-engastado (figuras (5.1) - (5.3)) observa-se que sempre ocorre "flambagem" antes do aparecimento de instabilidade dinâmica, e ela está associada ao primeiro "modo".

Verifica-se também a existência de três regiões bem definidas caracterizadas por:

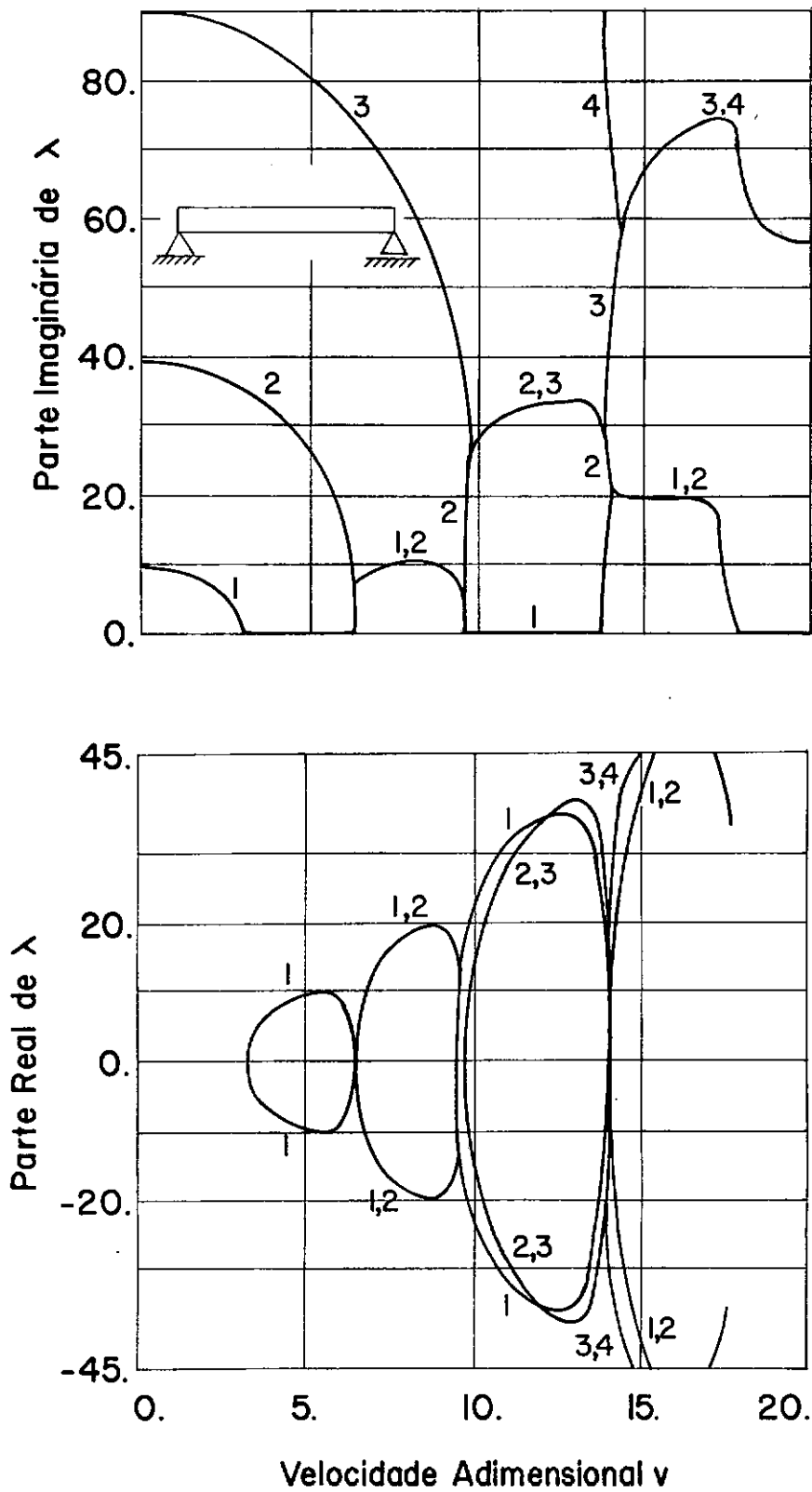


Fig. 5.1 - Curvas características - Sistema autônomo
Tubo bi-apoiado - ($\beta=0.5$, $\gamma=\Gamma=v=0$)

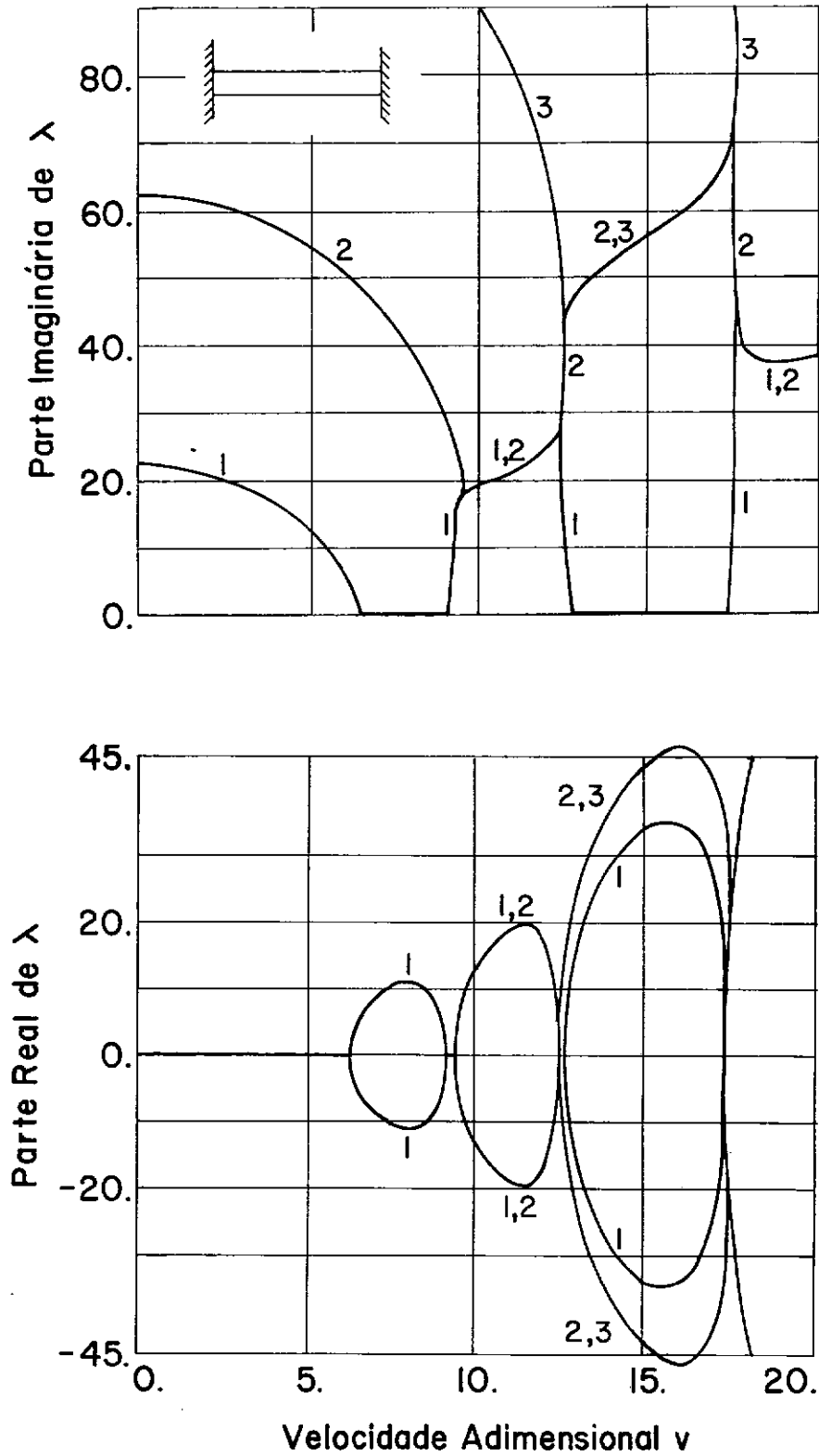


Fig. 5.2 - Curvas características - Sistema autônomo
Tubo bi-engastado - ($\beta=0.5$, $\gamma=\Gamma=v=0$)

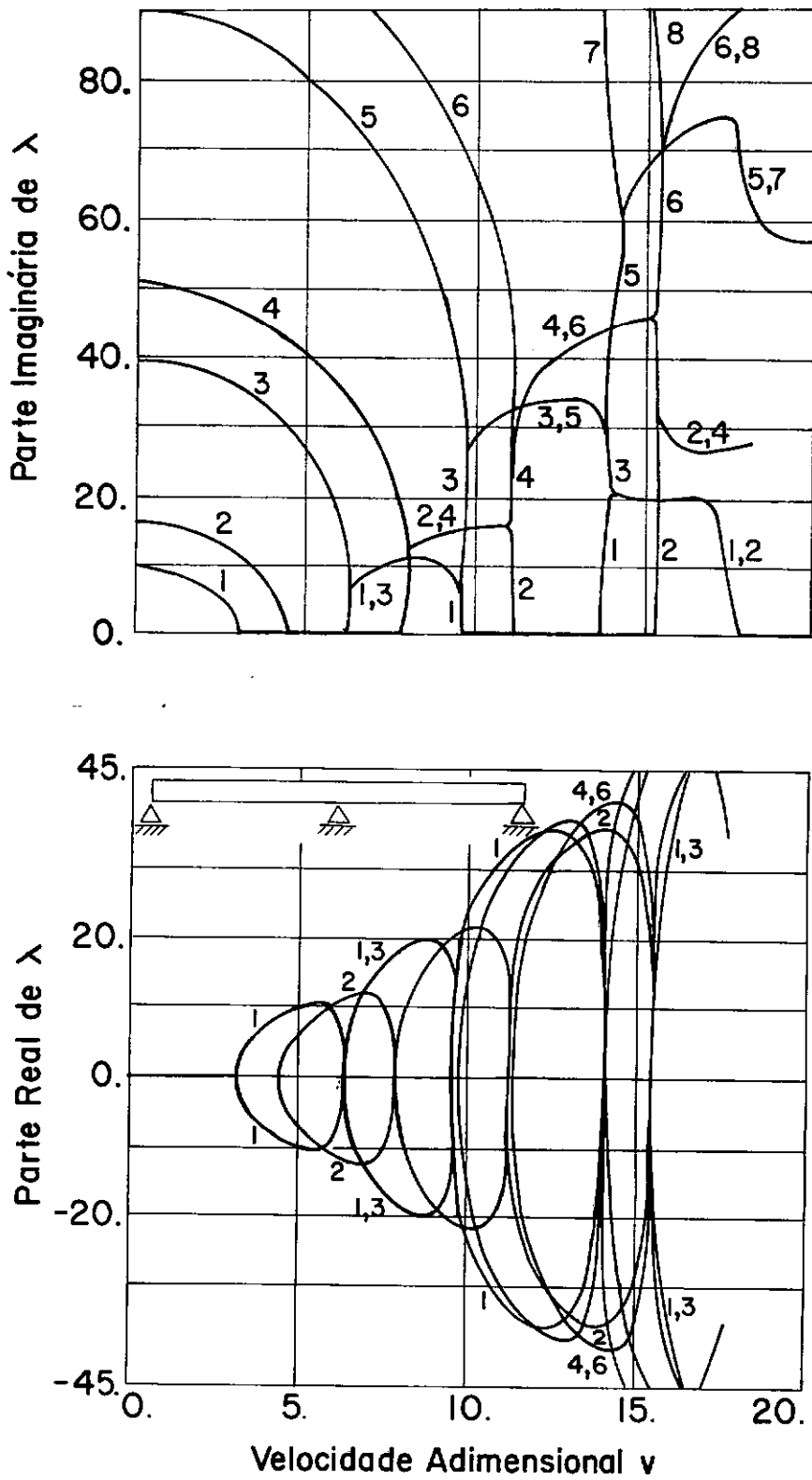


Fig. 5.3 - Curvas características - Sistema autônomo
Tubo com dois vãos - ($\beta=0.5$, $\gamma=\Gamma=v=0$)

1.^a região $\text{Re}\lambda_i=0$; $\text{Im}\lambda_i \neq 0$ para $v < 1.^a v_c$

2.^a região $\text{Re}\lambda_i \neq 0$; $\text{Im}\lambda_i=0$ para $1.^a v_c \leq v \leq 2.^a v_c$

3.^a região $\text{Re}\lambda_i \neq 0$; $\text{Im}\lambda_i \neq 0$ para $v > 2.^a v_c$

A 1.^a região define um caráter vibratório e um comportamento crítico do sistema. A 2.^a região demonstra a possibilidade de amortecimento crítico ($\text{Re}\lambda_1 < 0$; $\text{Im}\lambda_1 = 0$) no 1º modo. A 3.^a região caracteriza a ocorrência de superposição de modos. Todos estes resultados estão de acordo com a análise qualitativa desenvolvida no capítulo III (Ítem 3.6.3.2-a).

Para quase todos os valores de v satisfazendo $v \geq 1.^a v_c$, existe algum auto-valor com $\text{Re}\lambda_i > 0$, e portanto o sistema é instável; conclusão que se apoia no teorema II (capítulo IV - seção 4.3.1.3). A existência de uma pequena faixa de velocidades, próxima a $2.^a v_c$, para a qual todos os auto-valores têm $\text{Re}\lambda_i = 0$ e $\text{Im}\lambda_i \neq 0$ (ver fig. 5.2) indica a possibilidade de se ter estabilidade, o que está de acordo com a característica de estabilização de sistemas por forças giroscópicas.

Ressalta-se ainda que a inversão no sentido da velocidade de escoamento não altera os gráficos das figuras (5.1) a (5.3), o que também já havia sido previsto pela equação (4.55).

Para o tubo em balanço (fig. 5.4), quando o fluido escoa da extremidade fixa para a extremidade livre, o fluxo introduz um amortecimento positivo ($\text{Re}\lambda_i < 0$), que tende a estabilizar o sistema (estabilidade assintótica).

À medida que a velocidade de escoamento cresce, este efeito estabilizador também cresce para o primeiro modo. Isto não é verdade, entretanto, para o segundo e o terceiro modos, para os quais existem velocidades associadas com instabilidade dinâmica. Verifica-se também, que para o primeiro modo existe uma faixa de

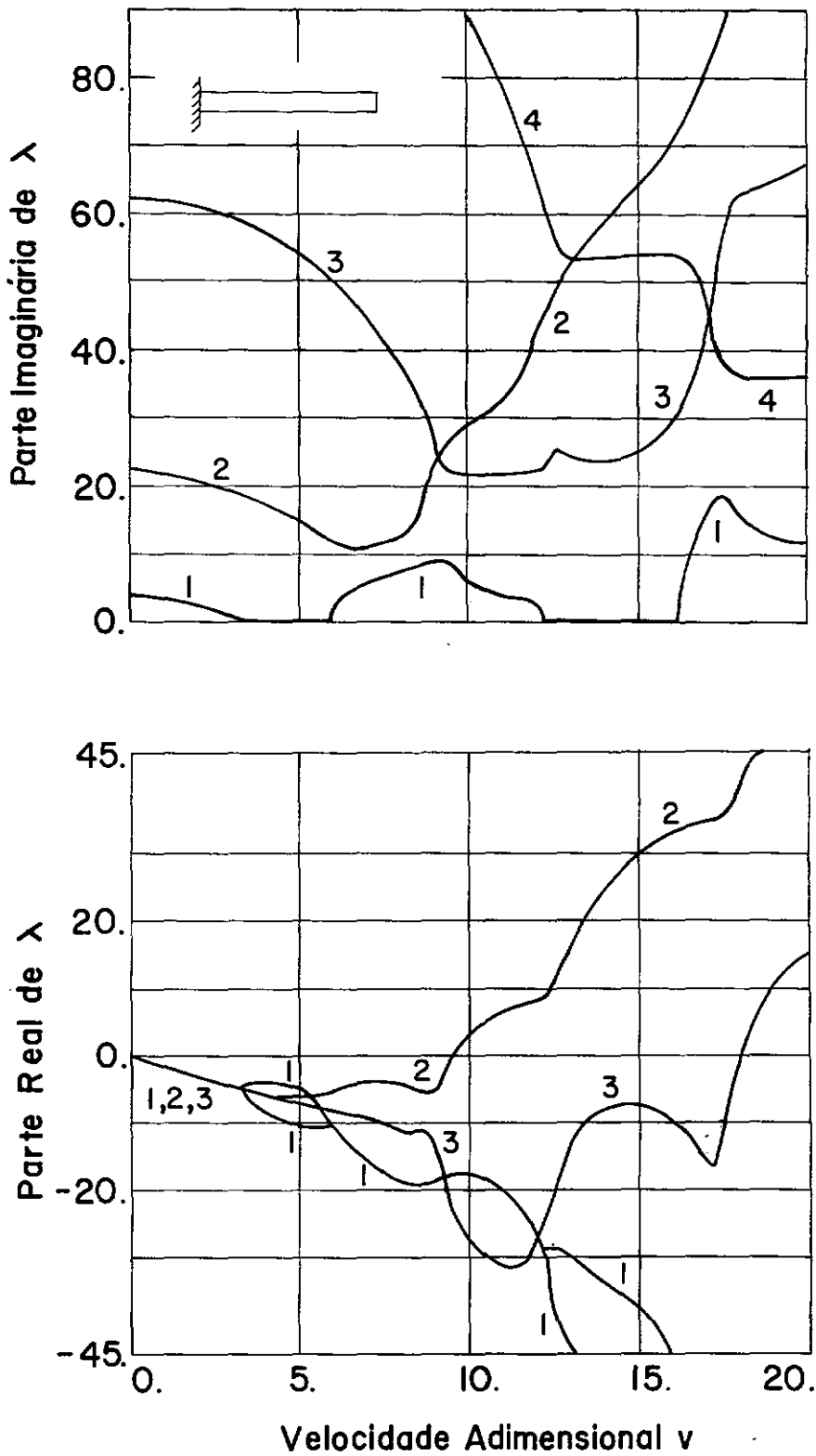


Fig. 5.4 - Curvas características - Sistema autônomo
Tubo em balanço - ($\beta=0.5$, $\gamma=\Gamma=v=0$)

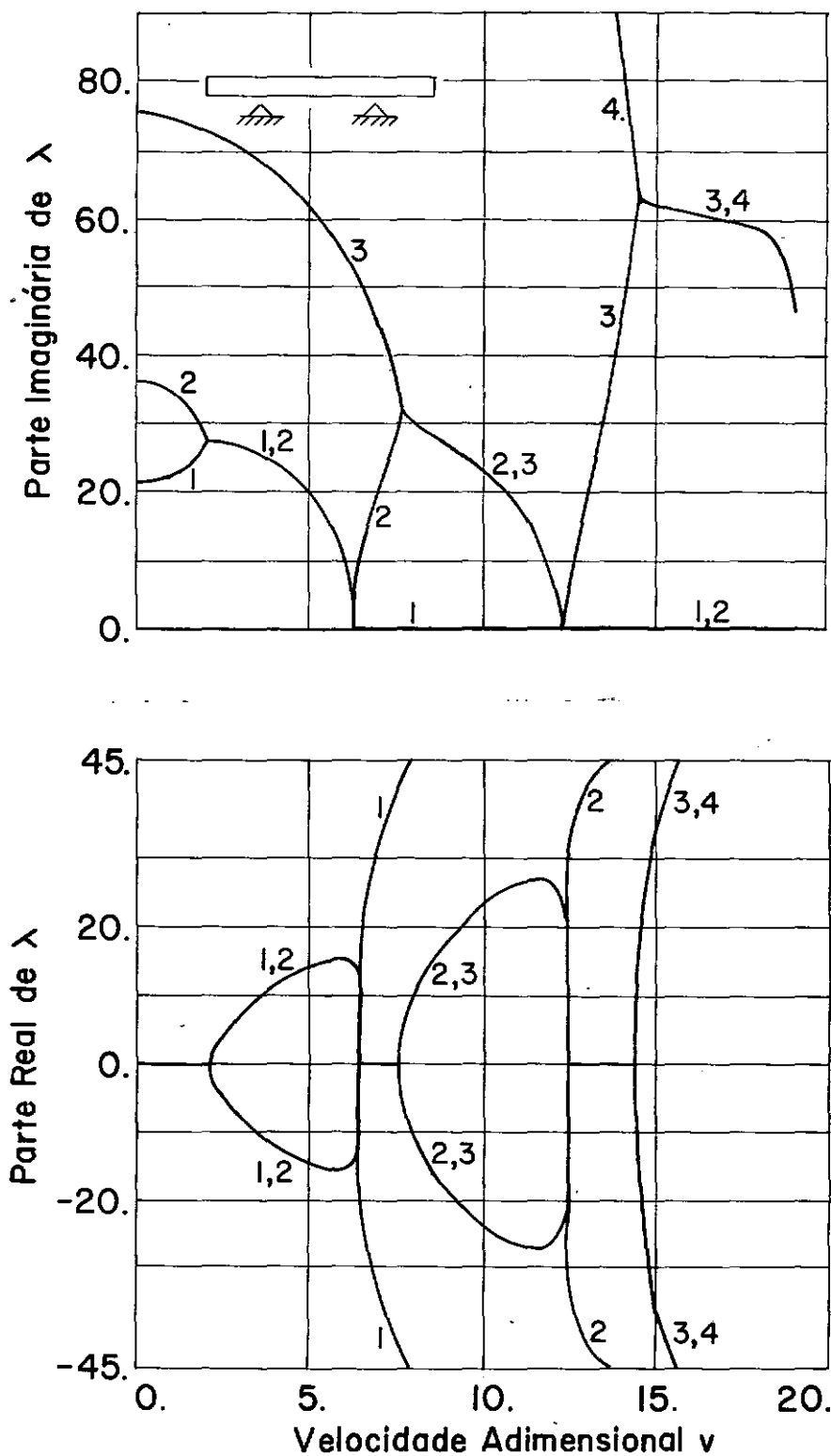


Fig. 5.5. Curvas características - Sistema autônomo
Tubo com balanços - ($\beta=0.5$, $\gamma=\Gamma=v=0$)

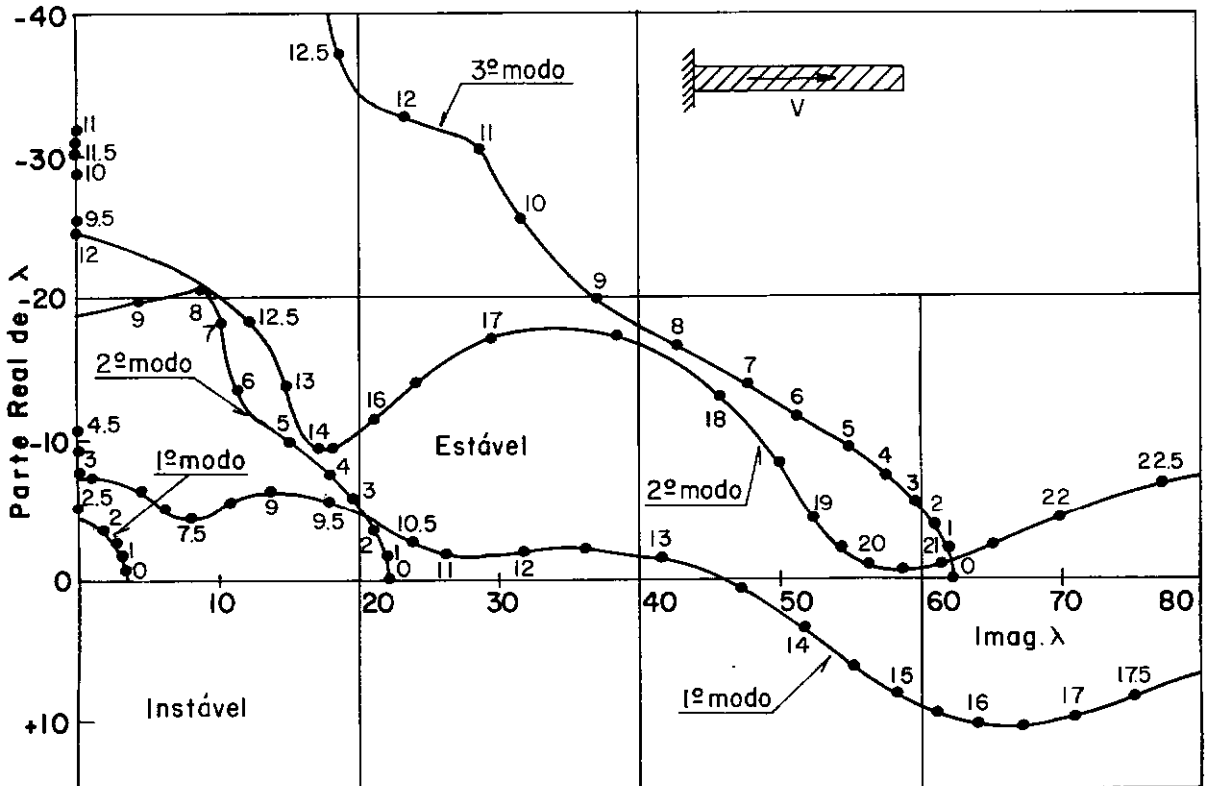
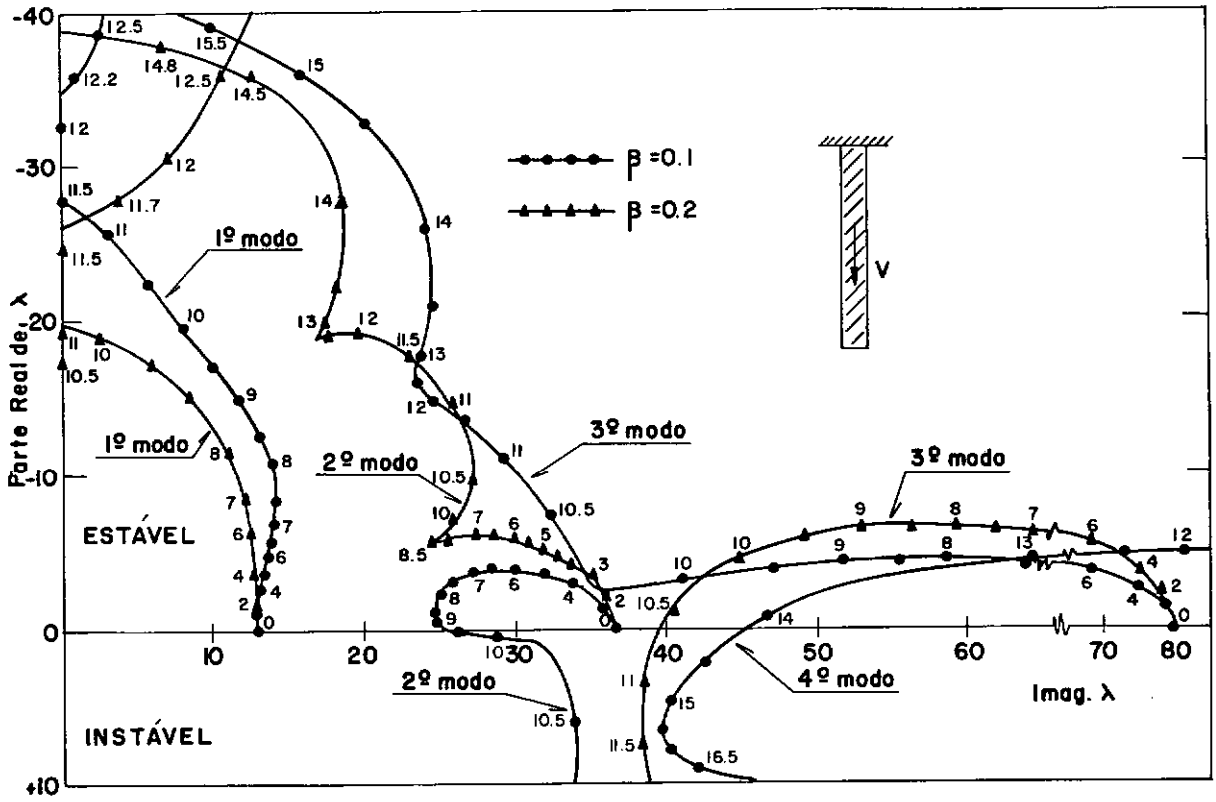
velocidades onde $\text{Im}\lambda_1=0$. Isto ocorre no intervalo entre dois pontos consecutivos de bifurcação da curva $\text{Re}\lambda_1$. Para estes valores de v , não existe vibração no primeiro modo, e pode-se dizer que um amortecimento crítico foi introduzido no sistema.

A inversão do sentido da velocidade de escoamento leva a uma inversão do gráfico $\text{Re}\lambda$, ou seja, para valores de v próximos a zero o sistema torna-se instável, o que é uma consequência da inversão do sentido da força não conservativa (ver equação (3.100)).

A figura (5.5) refere-se a um tubo bi-apoiado com dois balanços. Para este caso obtém-se a menor velocidade crítica associada à instabilidade dinâmica. Este fato é devido à presença do balanço e ao efeito desestabilizador da orientação do fluxo (da extremidade livre para o suporte).

Na figura 5.6, a variação dos auto-valores λ , para um tubo vertical sob a ação do campo gravitacional ($\gamma=100$), é apresentada na forma do diagrama complexo de Argand, sendo que, os pontos indicados sobre as curvas representam os valores das velocidades de escoamento. Estes resultados retirados de [1] concordam perfeitamente com aqueles apresentados na referência [10].

Os resultados, plotados neste diagrama mostram que para $\beta=0.1$, "flutter" ocorre para $v > 9.2$ e está associado ao segundo modo. Já para $\beta=0.2$ instabilidade dinâmica ocorre para $v > 10.7$, quando a parte real do auto-valor correspondente ao terceiro modo torna-se positiva. Em princípio, flutter pode ocorrer em qualquer modo, dependendo dos valores dos parâmetros do problema. Nesta situação particular a ação da gravidade é favorável do ponto de vista da estabilidade, pois tem um efeito de aumentar as fre-



quências de vibração.

A variação dos auto-valores, quando o parâmetro β , que define a relação entre a massa do fluido e a massa total do sistema, vale $\beta=0.77$ está mostrada na figura (5.7).

5.2.2. Escoamento pulsátil

Os resultados mostrados nas figuras (5.8) a (5.12) referem-se à situação em que a velocidade de escoamento é perturbada harmonicamente (eq. 4.56),

$$v = v_0(1 + \alpha \cos \Omega t) ,$$

e procura caracterizar a influência dos parâmetros v_0 , α e Ω , que definem as características do escoamento, sobre a estabilidade do sistema. Por esta razão, as análises efetuadas, se prendem à variação desses parâmetros. A velocidade média v_0 e a frequência do pulso de velocidades Ω estão adimensionalizadas segundo (ver item 3.6.3):

$$v_0 = \left(\frac{\rho A_f}{EI} \right)^{1/2} L \dot{\xi}_0$$

$$\Omega = \left[\frac{(\mu A + \rho A_f)}{EI} \right]^{1/2} L^2 \omega_f$$

As figuras (5.8) a (5.10) relacionam-se com o caso bi-apoiado, e os diagramas (5.11) a (5.12) correspondem ao tubo em balanço. Os gráficos apresentados nestas figuras mostram as regiões de ressonância paramétrica, relacionadas com as três menores frequências do sistema, e esses resultados foram obtidos adotando-se $\beta=0.5$, $\Gamma = \nu = \gamma = 0$.

As fronteiras das regiões principais (período $2T$) estão traçadas com linhas hachuriadas e linhas tracejadas, corres

pondendo respectivamente a primeira aproximação e a segunda aproximação. As linhas cheias, fornecem as fronteiras das regiões secundárias (período T) associadas a primeira aproximação. As regiões no interior dessas curvas correspondem a zonas de instabilidade.

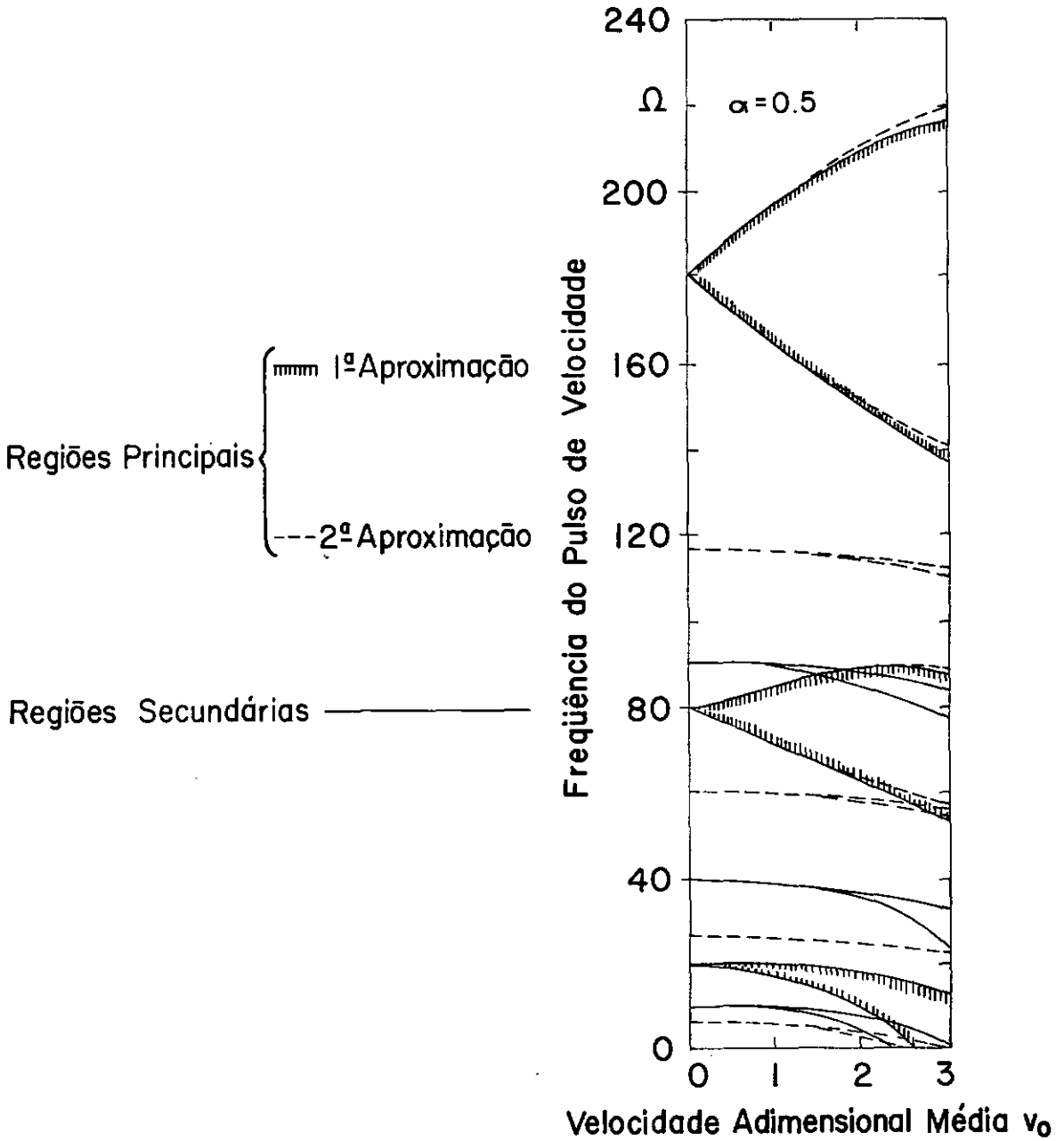


Fig. 5.8 - Regiões de ressonância paramétrica - tubo bi-apoiado
Comparação entre a 1.^a e 2.^a aproximação

Para $\alpha=0$ (sistema autônomo) a equação variacional garante a ocorrência de instabilidade para $v_0 \geq \pi$ (ver figura 5.1). Comportamento bastante diferente surge agora quando $\alpha \neq 0$. Nestas situações (ver figs. (5.8) e (5.9)), instabilidade dinâmica (ressonância paramétrica) pode ocorrer para qualquer valor de v_0 .

As figuras (5.8) e (5.9) apresentam regiões, no plano (v_0, Ω) , para valores fixos de α . As regiões principais, conforme se pode notar, são aquelas limitadas por soluções de período $2T$ e que se desenvolvem em torno de $2\text{Im}\lambda_i$, sendo $\text{Im}\lambda_i$ as frequências naturais do sistema autônomo (ver fig. (5.1)).

Na figura (5.8) é feito um estudo comparativo, entre a primeira aproximação (eq. 4.63) e a segunda aproximação (equação 4.65) utilizadas para a obtenção das regiões principais de ressonância paramétrica. Pode-se ver que na segunda aproximação surgem novas regiões de instabilidade, desenvolvendo-se em torno de $2\text{Im}\lambda_i/3$. Entretanto, estas regiões são de pouca importância. Vê-se também, que para as regiões principais, a primeira aproximação difere pouco da segunda, no intervalo $0 \leq v_0 \leq \pi$, e é exatamente neste intervalo que se torna interessante a caracterização das regiões de ressonância paramétrica. Portanto, para estes casos, o uso da primeira aproximação parece ser suficiente.

A figura (5.9) procura mostrar a influência do parâmetro α sobre as regiões principais. Verifica-se que aumentando-se o valor de α , ocorre uma amplificação bem como uma distorção dessas regiões. Obviamente quando $\alpha \rightarrow 0$ estas regiões tendem a linhas (ressonância simples). Para $\alpha=0.1$ fica evidenciada a tendência dessas regiões de inclinarem-se para baixo, o que pode ser explicado pela variação das frequências, com a velocidade v_0 .

(ver fig. 5.1).

Regiões de Ressonância Paramétrica-Tubo Bi-apoiado

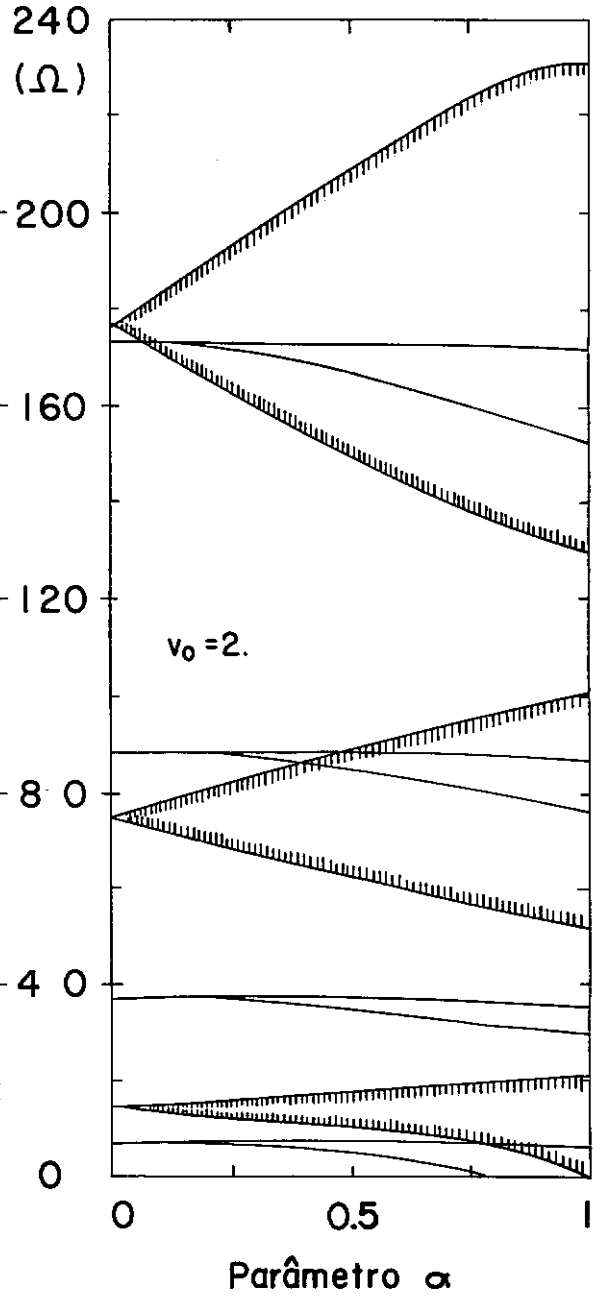
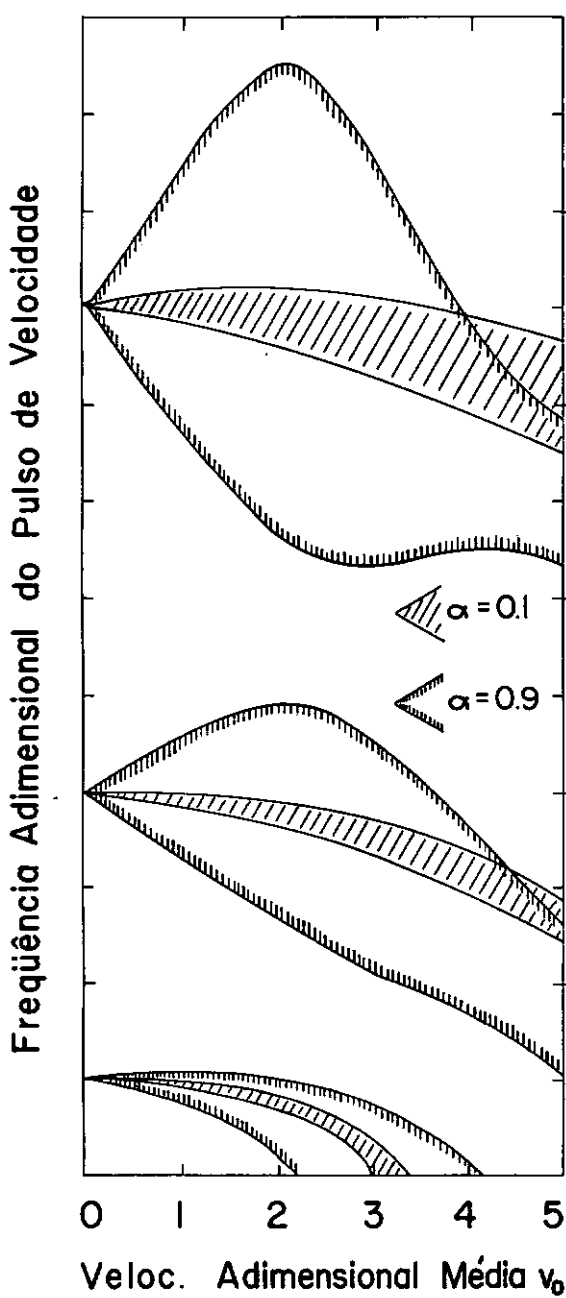


Fig. 5.9 - Influência do parâmetro α

Fig. 5.10 - Regiões de instabilidade no plano $(\Omega \times \alpha)$

A variação de Ω com o parâmetro α está mostrada na figura 5.10, para um valor fixo da velocidade adimensional de fluxo $v_0 = 2$. Conforme pode ser visto na figura 5.1, para este valor

de v_0 , não existe amortecimento em nenhum dos modos de vibração ($\text{Re}\lambda_i=0$). Por isso mesmo as regiões de ressonância se estendem até o eixo $\alpha=0$.

Situação distinta ocorre no caso da viga em balanço. Assim, por exemplo, na figura 5.11 as regiões de instabilidade não mais se prolongam até $\alpha=0$, e isso é devido ao amortecimento introduzido pelo escoamento do fluido (ver fig. 5.4). Para este valor de v_0 todos os auto-valores do sistema autônomo têm $\text{Re}\lambda_i < 0$ e a não existência, neste caso, de ressonância paramétrica está explicada pelo teorema IV - item 4.3.1.4.

A presença deste amortecimento é favorável à estabilidade do sistema pois desloca as regiões de instabilidade paramétrica para a direita. Nota-se também que para este valor da velocidade de escoamento ($v_0=2$) o amortecimento relativo entre os modos é maior para os modos inferiores, implicando em que, as regiões de ressonância paramétrica que se desenvolvem em torno das frequências mais baixas do sistema, estejam mais deslocadas para a direita.

A figura 5.4 mostra também que neste caso, o primeiro modo é sempre estável. Por isso mesmo nos diagramas (5.11) e (5.12) não existem regiões de ressonância paramétrica associadas a este modo.

Finalmente nas figuras (5.11) e (5.12) é feita também uma comparação entre as duas primeiras aproximações usadas para o traçado das regiões principais. Verifica-se nestes gráficos, que para valores pequenos de v_0 e α , os resultados obtidos nos dois casos são praticamente idênticos. Porém, à medida que estes parâmetros crescem, maior afastamento entre os valores corresponden

Regiões de Ressonância Paramétrica - Tubo em Balanço

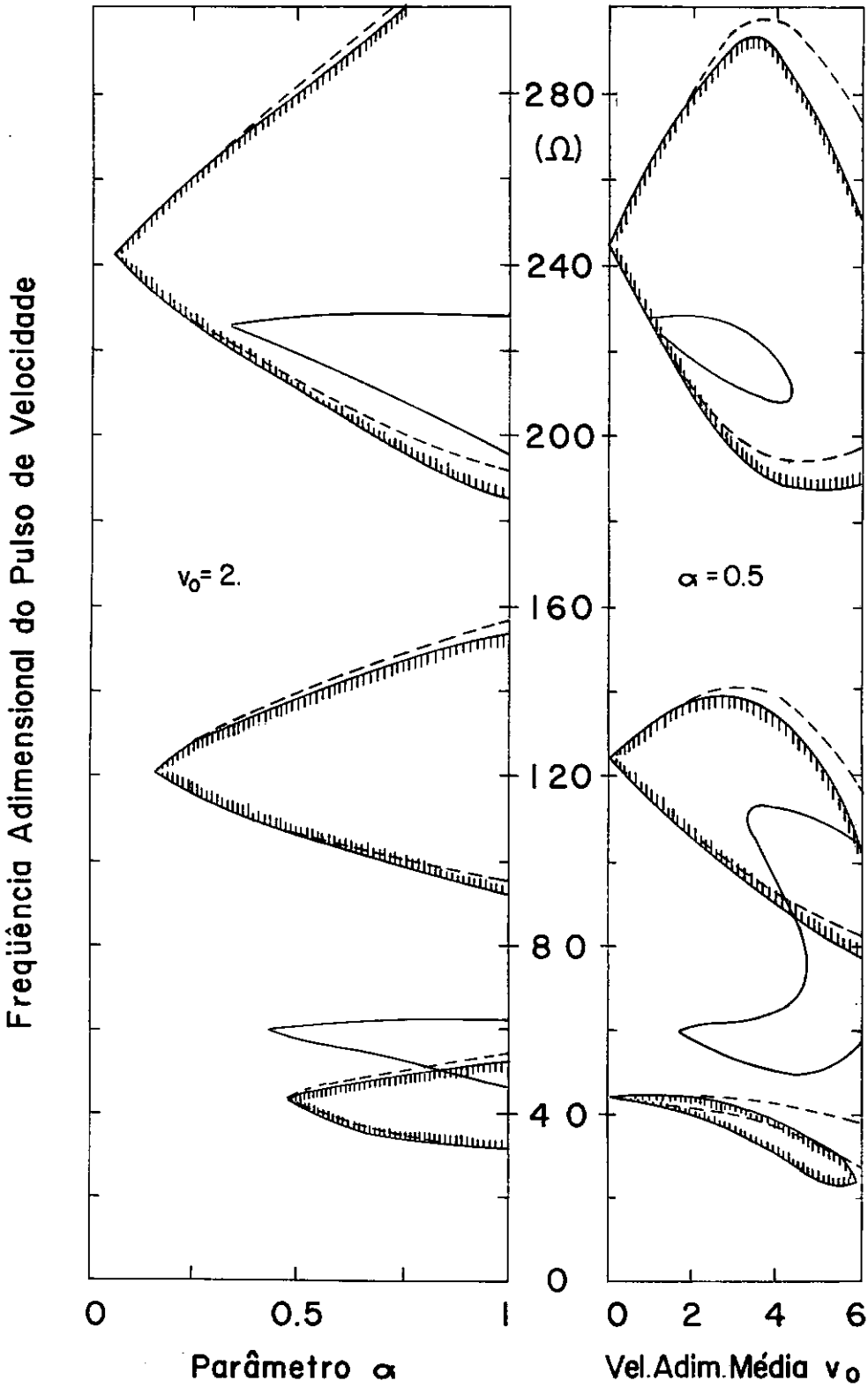


Fig. 5.11 - Influência do amortecimento introduzido pelo fluxo

Fig. 5.12 - Regiões de instabilidade no plano $(\Omega \times v_0)$

tes a estas duas aproximações vai sendo obtido, justificando portanto o uso de aproximações de ordem superior, com o que, consegue-se melhor precisão nos cálculos.

5.3. Vibrações livres

Os resultados apresentados nas figuras 5.13 a 5.15 referem-se ao problema de vibrações livres lineares de um tubo bi-apoiado, com $\beta=0.5$, $\nu=\Gamma=\gamma=0$. A velocidade adimensional do fluido foi tomada igual a 6.33, valor para o qual, conforme mostrado na fig. 5.1, ocorre superposição dos dois primeiros modos.

Nas figuras 5.13 e 5.14 é mostrada a evolução do movimento de três pontos característicos desse tubo, definidos pela coordenada adimensional $\chi=1/4$, $1/2$ e $3/4$. As condições iniciais utilizadas no traçado da fig. 5.13 estão desenhadas nas figs. 5.15a-b e correspondem à auto-função associada ao auto-valor $\lambda = -0.434 \pm \pm 6.966i$. Para a figura 5.14 as condições iniciais correspondem à auto-função para a qual $\lambda = +0.434 \pm 6.966i$ e estão mostradas nas figs. 5.15 e-f. Ambos os auto-valores estão associados a $v = 6.33$ (ver fig. 5.1).

Na obtenção desses resultados utilizou-se a mesma discretização espacial usada anteriormente no correspondente problema de auto-valor (4 elementos), e a integração numérica da equação (4.17) foi feita adotando-se para intervalo de integração o valor:

$$\Delta\tau = \frac{T}{250} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\text{Im}\lambda}$$

É claramente visto que os movimentos vibratórios, representados nas figuras 5.13 e 5.14, são amortecido e amplificado respectivamente, o coeficiente de amortecimento ou amplificação sen

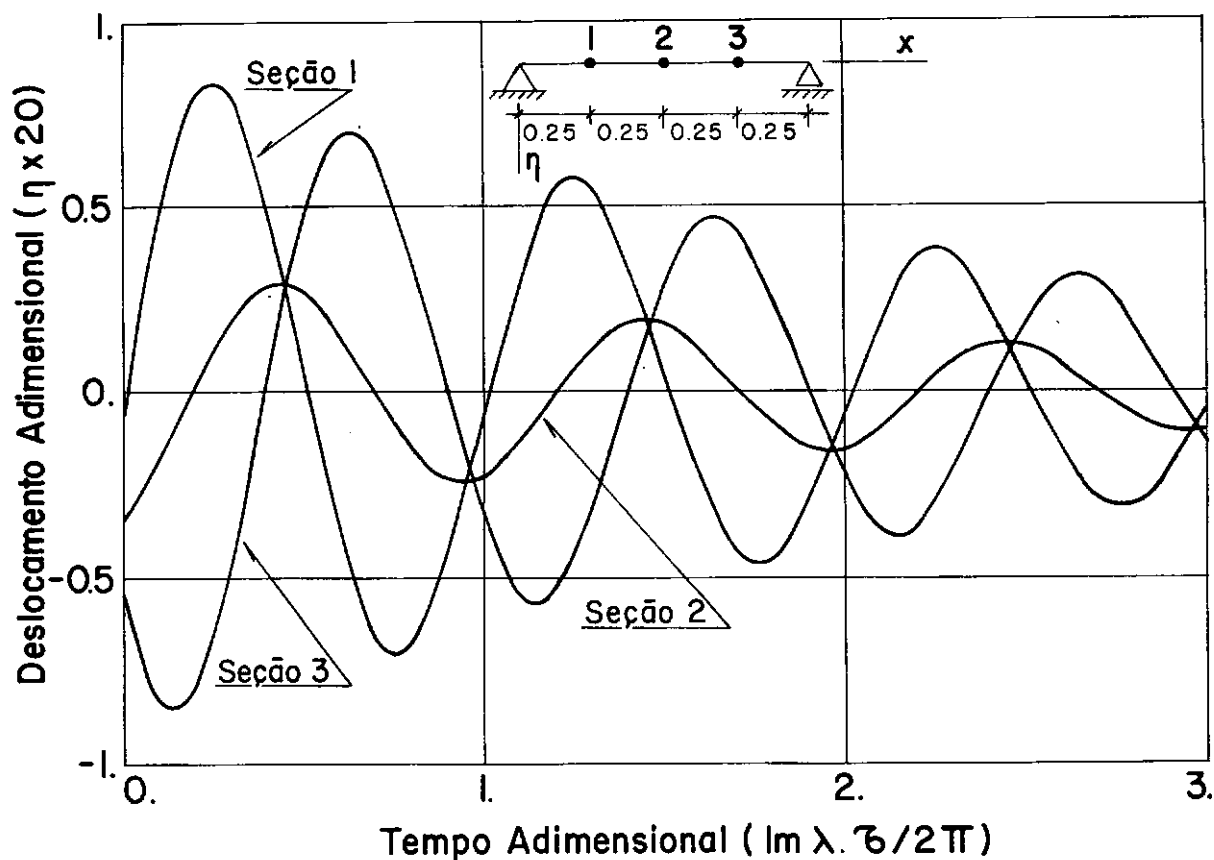


Fig. 5.13 - Vibrações livres. Sol. linear ($\beta=0.5$, $\nu=6.33$, $\text{Re } \lambda < 0$)

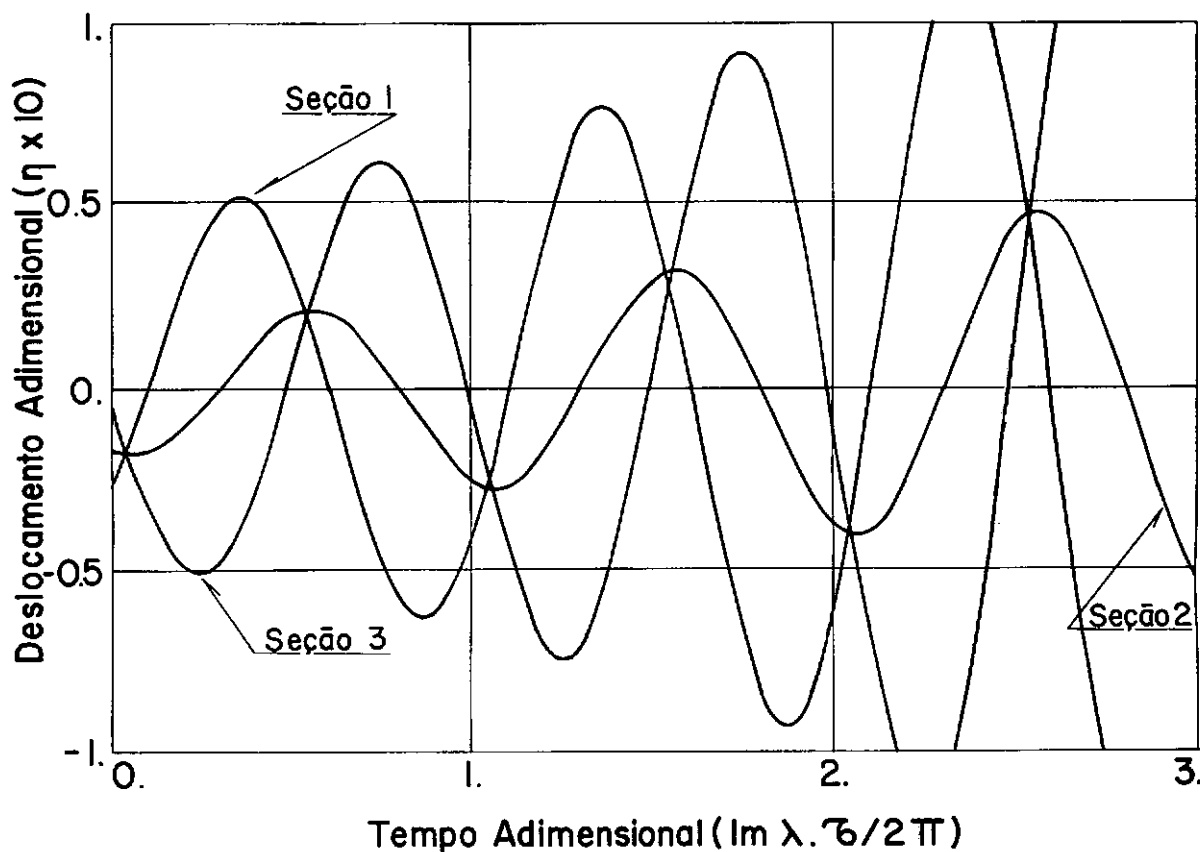


Fig. 5.14 - Vibrações livres. Sol. linear ($\beta=0.5$, $\nu=6.33$, $\text{Re } \lambda > 0$)

do dado pela parte real de λ . Vê-se também que não é possível caracterizar um modo "standard" de vibração. Uma configuração, que em determinado instante é semelhante ao segundo modo, pode gradativamente evoluir para uma configuração similar ao primeiro, conforme está ressaltado nas figuras (5.15c-d,g-h).

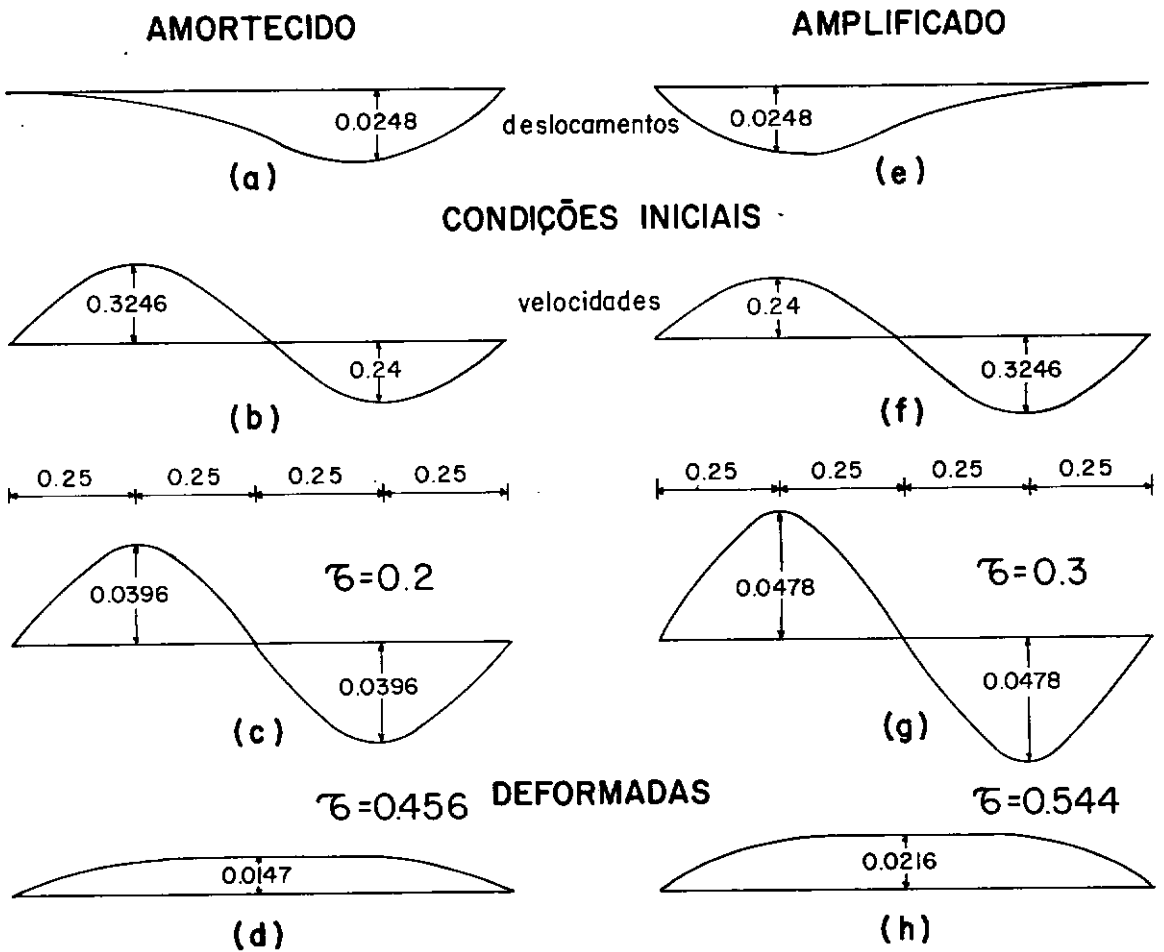


Fig. 5.15 - Caracterização da distorção dos modos normais

O segundo exemplo de vibrações livres a ser apresentado, procura comparar a solução linear, com a resposta obtida quando se utiliza o modelo não-linear incremental desenvolvido no capítulo IV-seção 4.2. Antes da discussão deste problema é conveniente de mostrar a possibilidade da utilização do modelo de elementos fi

nitos elaborado, (discretização em elementos retos - atualização das coordenadas nodais dos elementos), no tratamento de problemas de flexão de vigas envolvendo grandes deslocamentos e grandes rotações. Com essa finalidade estuda-se o caso de uma viga em balanço, sujeita a um momento concentrado atuando no bordo livre. Na figura 5.16 comparam-se os resultados numéricos obtidos, com a solução analítica dos deslocamentos e da rotação da extremidade livre, que é:

$$\phi = 2\pi\kappa ; \frac{u}{L} = (\sin \phi / \phi - 1) ; \frac{w}{L} = (1 - \cos \phi) / \phi$$

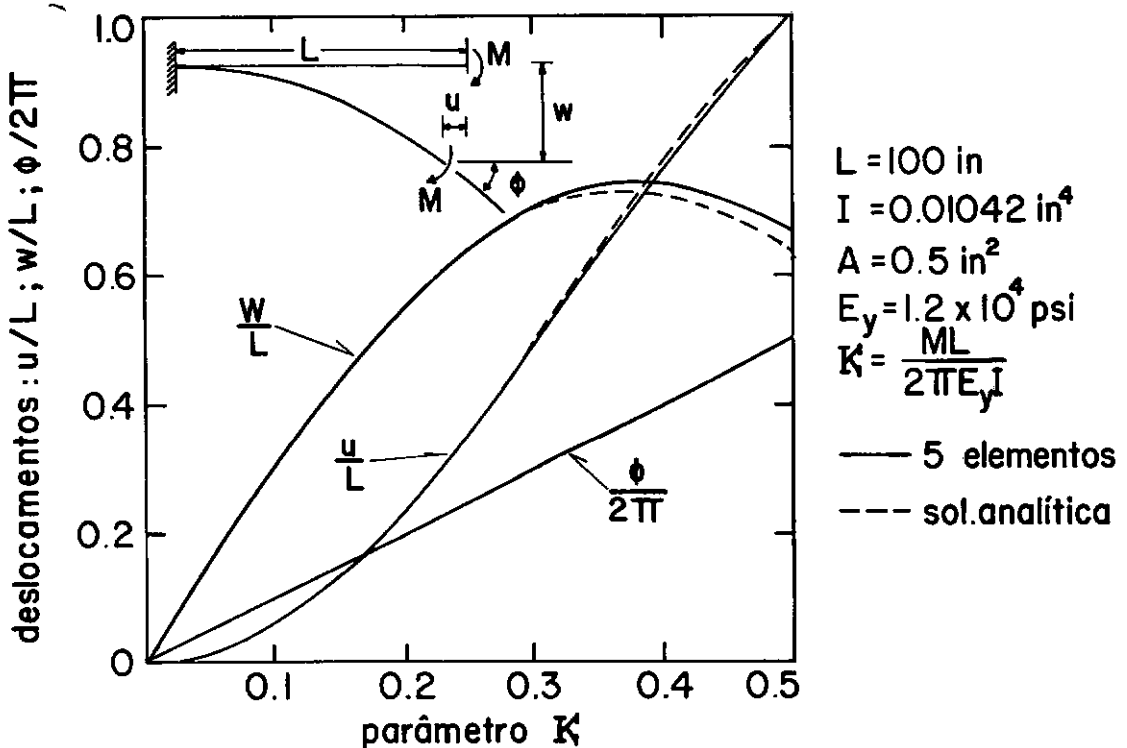


Fig. 5.16 - Curva Momento x Deflexão - Caso estático

A observação dos diagramas apresentados nesta figura, calculados utilizando-se 5 elementos iguais, 125 incrementos de carga e sem se fazer iteração de equilíbrio, demonstra a eficiência

cia do modelo de viga proposto, na solução deste problema. Convém notar que para $\kappa=0.5$, o deslocamento horizontal da extremidade livre vale $(-L)$ e a rotação é igual a (π) .

Seja agora o problema de vibrações livres de um tubo em balanço, com $\beta=0.5$, conduzindo um fluido que escoa a velocidade constante, da extremidade fixa para a extremidade livre. Na figura 5.4 já se havia mostrado anteriormente o comportamento dos auto-valores deste sistema, verificando-se que, para a curva característica (λ_2, v) associada ao segundo modo, obtinha-se $\text{Re}\lambda_2 > 0$ para $v > \approx 9.52$. Assim sendo, procurou-se agora analisar o comportamento da resposta dinâmica deste sistema, quando a velocidade adimensional de escoamento do fluido vale 10 e 15, comparando-se nas figuras 5.18 e 5.19 os resultados obtidos, utilizando-se a aproximação linear e o modelo não-linear. A condição inicial tomada nos dois casos foi a mesma, representando deslocamentos nulos e uma distribuição de velocidades (ver figura 5.17) que corresponde ao segundo modo normal de vibrações livres lineares ($v=0$).

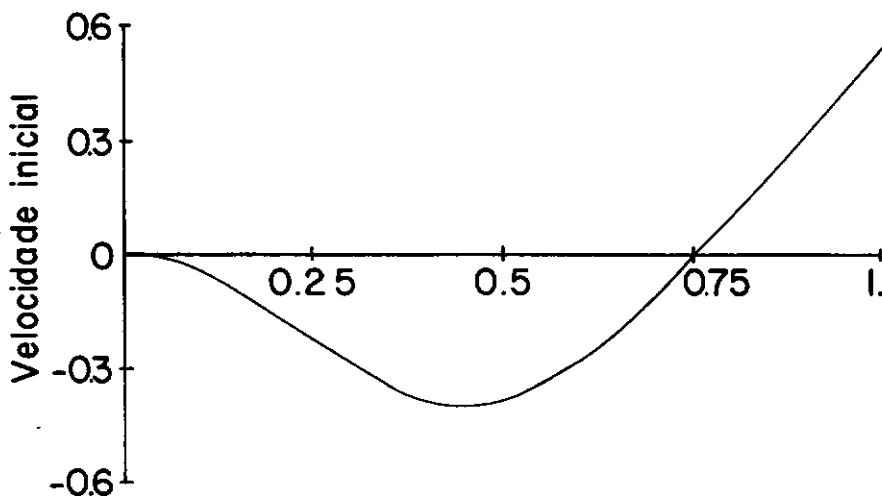


Fig. 5.17 - Condição inicial em velocidade

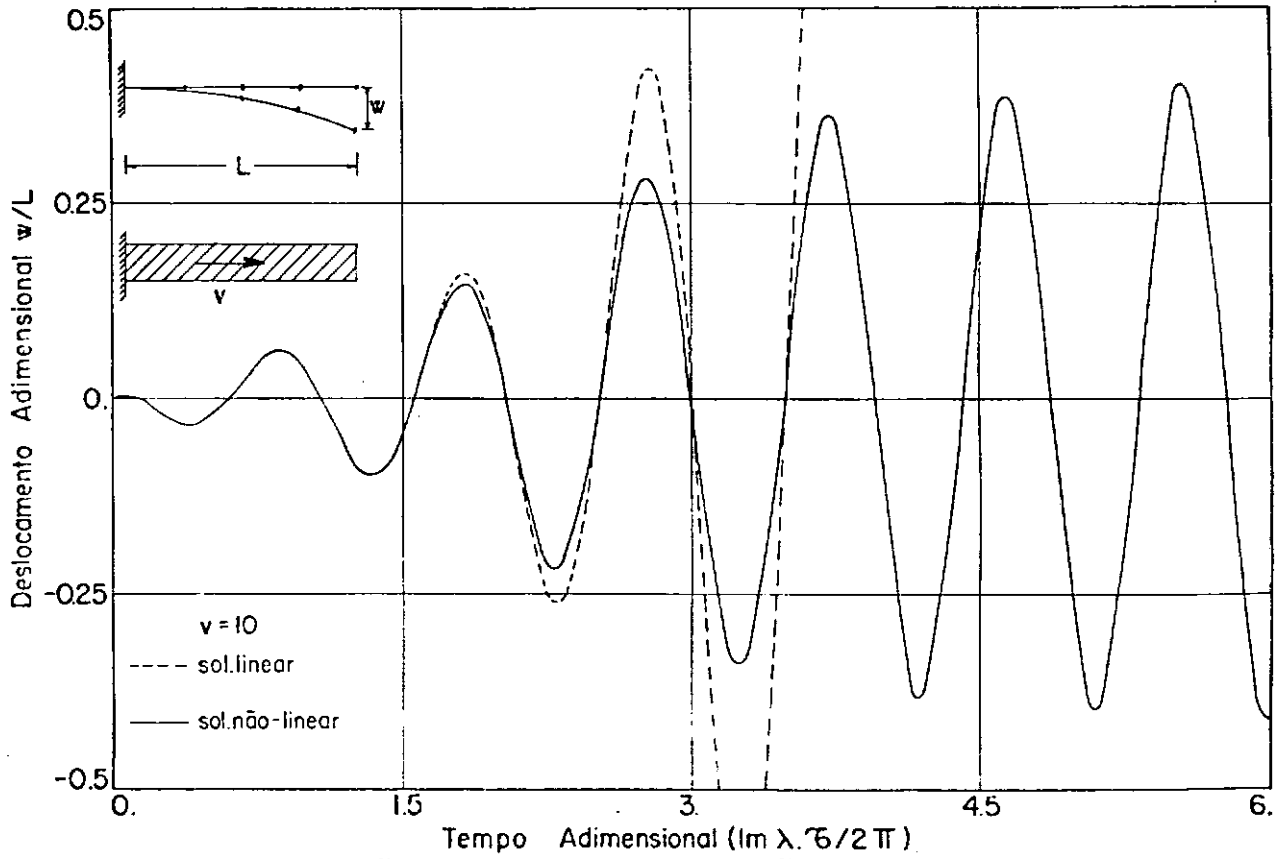


Fig. 5.18 - Vibrações livres - Comparação: sol.linear e não linear

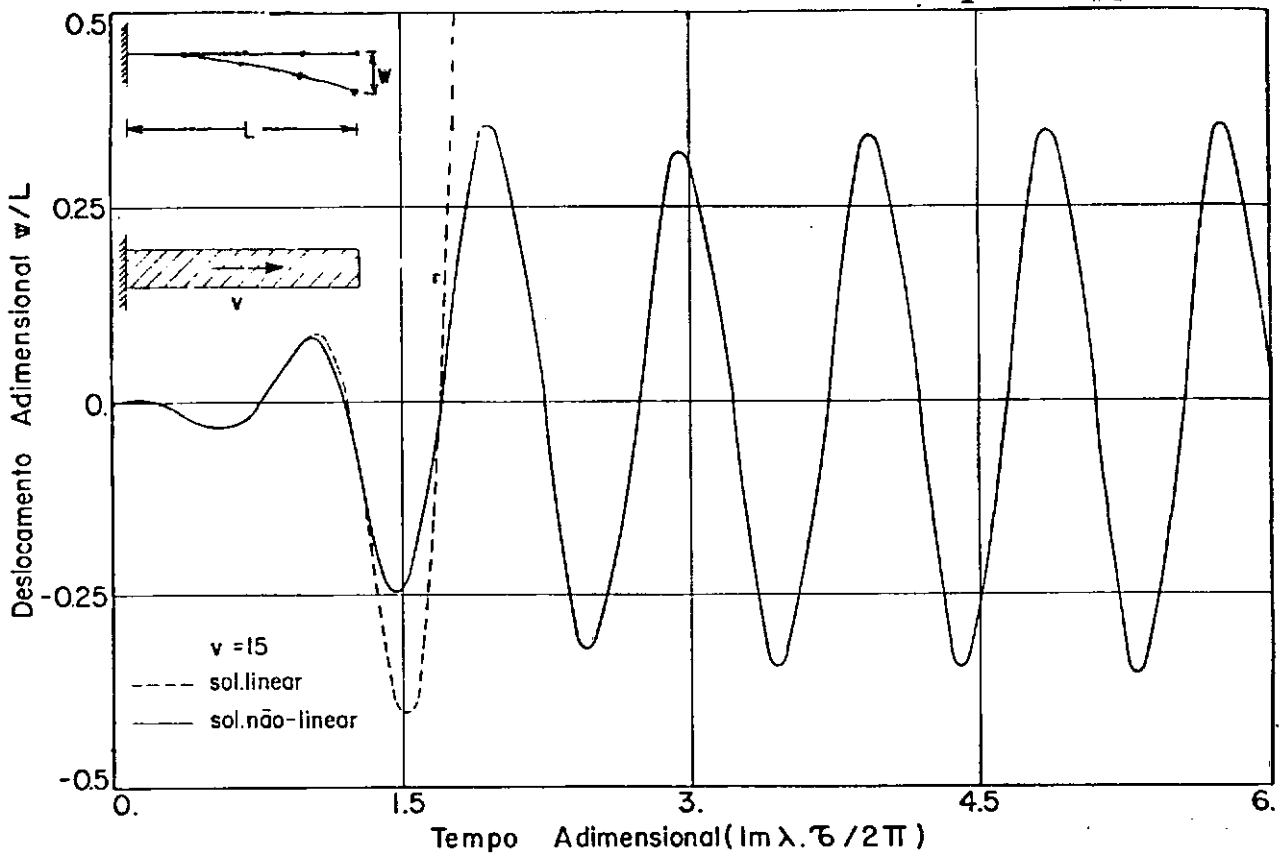


Fig. 5.19 - Vibrações livres - Comparação: sol.linear e não linear

A discretização de elementos finitos foi feita tomando-se 4 elementos iguais e o incremento de tempo utilizado foi:

$$\Delta\tau = \frac{T}{250} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\text{Im}\lambda} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Im}\lambda = 30 & \text{para } v = 10 \\ \text{Im}\lambda = 65 & \text{para } v = 15 \end{array} \right.$$

Na solução não-linear foi usada iteração de equilíbrio, a tolerância adotada foi 10^{-3} , obtendo-se sempre convergência com apenas 1 iteração, o que se deve possivelmente ao pequeno incremento de tempo adotado.

De acordo com os gráficos mostrados nas figuras 5.18 e 5.19, verifica-se que a solução linear prevê uma resposta crescendo ilimitadamente com o tempo, esse crescimento sendo bem maior no caso da fig. 5.19 ($v=15$), para o qual a amplificação associada com a parte real do auto-valor é bem maior do que na situação em que $v=10$ (ver fig. 5.4).

Comportamento bastante diferente é obtido no caso não-linear. Inicialmente, enquanto os deslocamentos são relativamente pequenos, as duas soluções (linear e não-linear) praticamente coincidem. Entretanto, à medida em que crescem os deslocamentos, o modelo não-linear é capaz de representar o aumento de rigidez do tubo, conduzindo à obtenção de deslocamentos sensivelmente inferiores aos previstos pela teoria linear, e que permanecem limitados no tempo, obtendo-se a condição do ciclo limite de flutter.

5.4. Resposta transiente

Com a finalidade de ilustrar a aplicação do modelo de elementos finitos, desenvolvido neste trabalho, em problemas dependentes do tempo, analisa-se em seguida a resposta transiente

de um tubo em balanço, sujeito a uma força concentrada $F_c = F \sin \omega_1 t$, atuando na extremidade livre do tubo (ω_1 é a frequência fundamental de vibrações livres lineares do tubo vazio).

Considera-se que o tubo está inicialmente vazio, e que o escoamento do fluido, que se processa da extremidade fixa para a extremidade livre, inicia-se no mesmo instante ($t=0$) em que a força concentrada começa a agir. Não se considerou a ação da gravidade e a pressão de descarga foi tomada $p^*=0$. As características do tubo e do fluido são:

- Diâmetro médio do tubo $d = 20\text{cm}$
- Espessura do tubo $e = 0.2\text{cm}$
- Módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
- Momento de inércia $I = 200\pi \text{cm}^4$
- Massa específica do material do tubo $\mu = 7.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$
- Massa específica do fluido $\rho_f = 1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$
- Comprimento do tubo $L = 10\text{m}$
- Frequência fundamental do tubo vazio $\omega_1 = 13.15 \text{rd/s}$

Os valores numéricos acima especificados conduzem aos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\gamma = 0 \quad ; \quad \beta = 0.77$$

O comportamento deste sistema, para o problema de vibrações livres, já havia sido previamente apresentado na fig. 5.7. Verifica-se desta figura, que amortecimento crítico no 1º modo é possível para valores da velocidade adimensional situados na faixa $2.5 < v < 5.5$.

Com essas observações preliminares os seguintes casos serão agora estudados:

a) Escoamento uniforme - análise linear

Este exemplo procura caracterizar a resposta dinâmica do tubo, quando o escoamento se processa a velocidade constante. Na Figura 5.20 estão indicados os resultados obtidos para $v=0$ (sem fluido), $v=1.0\text{ m/s}$ e $v=1.5\text{ m/s}$.

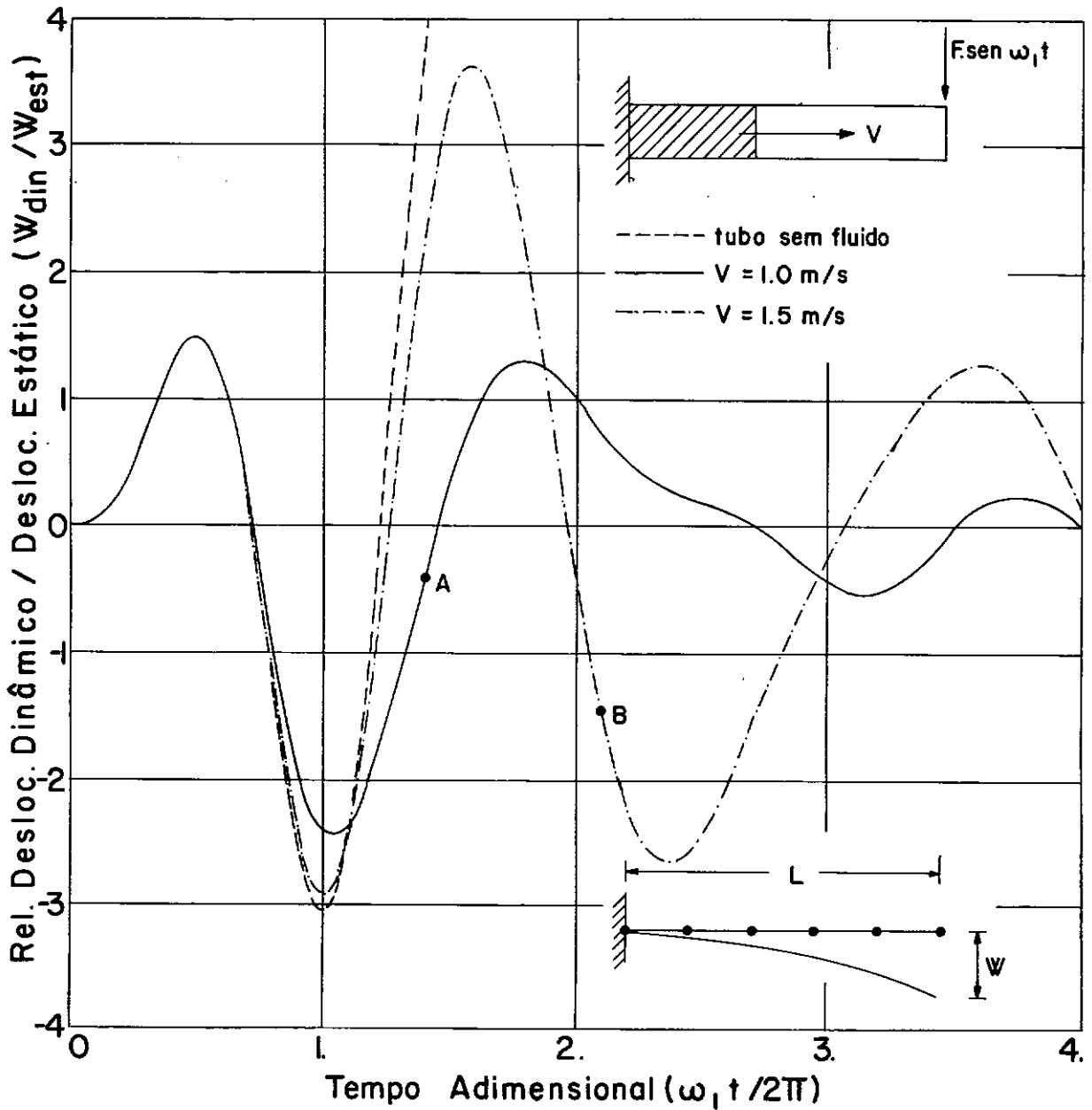


Fig. 5.20 - Resposta transiente - Escoamento uniforme

O eixo horizontal representa o tempo adimensional:

$$\tau = \frac{\omega_1}{2\pi} t$$

e o eixo vertical representa a relação entre o deslocamento dinâmico da extremidade livre e o deslocamento estático desta extremidade, para $F=1000\text{N}$.

A discretização espacial foi feita tomando-se 5 elementos iguais e o incremento de tempo adotado para a integração do sistema de equações diferenciais ordinárias foi:

$$\Delta\tau = \frac{T}{250} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

As projeções, sobre o eixo horizontal, dos pontos A e B marcados sobre as curvas, indicam para cada velocidade de escoamento, o tempo necessário para que o tubo fique completamente cheio de fluido.

Para o tubo vazio a solução cresce ilimitadamente com o tempo, como era de se esperar, dada a condição de ressonância simples (a frequência da excitação é igual à frequência fundamental de vibração do tubo).

Por outro lado, a resposta transiente para $V=1\text{m/s}$ e $V=1.5\text{m/s}$ mostra claramente o efeito amortecedor causado pelo escoamento do fluido, o amortecimento mais efetivo sendo obtido para $V=1.5\text{m/s}$. Estes resultados estão de acordo com a análise mostrada na fig. 5.7, embora seja importante destacar que a estas velocidades de escoamento correspondem valores adimensionais de 0.048

e 0.073, os quais estão sensivelmente afastados da faixa de velocidades adimensionais ($2.5 < v < 5.5$) para as quais se obtém amortecimento crítico no 1º modo.

b) Comparação entre a solução linear e a não-linear

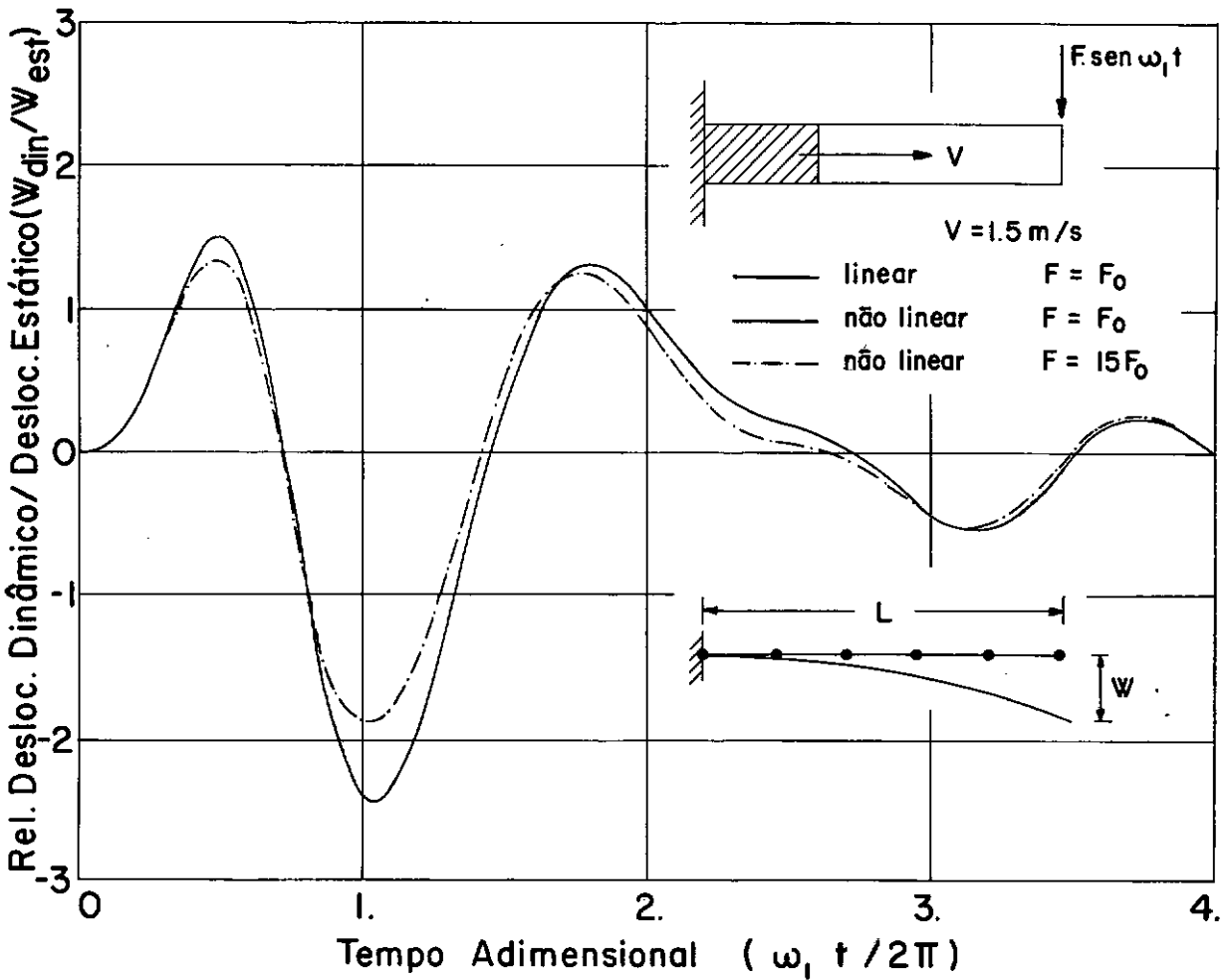


Fig. 5.21 - Resposta transiente - Solução não-linear

Na figura 5.21 é feita a comparação entre a solução linear e a resposta dinâmica não-linear quando $V=1.5\text{m/s}$, para dois valores da amplitude de carga:

$$F = F_0 = 1000\text{N}$$

$$F = 15F_0$$

Na obtenção dos resultados mostrados nesta figura, utilizou-se a mesma discretização espacial e o mesmo incremento de tempo usado no exemplo anterior.

Em linha cheia está representada a solução linear, que obviamente coincide para os dois valores de F , o que não acontece na análise não-linear (o eixo vertical representa sempre a relação entre o deslocamento dinâmico e o deslocamento linear estático devido a F).

O efeito do amortecimento introduzido no sistema pelo escoamento do fluido, e que está relacionado com a aceleração de Coriolis (eq. 3.39), é superestimado na análise linear, já que neste caso, ao se confundir as configurações deformadas com a configuração inicial (instante $t=0$), ou seja, ao se assumir $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$ (eq. 3.18), a componente $\dot{\xi} \cos \phi$ da velocidade tangencial do fluido é aproximada por $\dot{\xi}$.

Isso não acontece no modelo não-linear, onde a atualização da configuração de referência consegue representar a condição de ser o fluxo sempre tangencial.

Por outro lado, do ponto de vista estrutural, o modelo

linear de uma viga em balanço é menos rígido que o não-linear.

A partir dessas observações é possível interpretar os resultados mostrados na figura 5.21, obtidos com o modelo não-linear, para as cargas de amplitude F_0 e $15F_0$.

No primeiro caso, a não-linearidade geométrica da estrutura é pouco significativa, os deslocamentos são razoavelmente pequenos, e os resultados apresentados praticamente coincidem com os previstos pela teoria linear.

Para a força de amplitude $15F_0$, a rigidez do tubo aumenta em relação àquela obtida com o modelo linear; em contrapartida a ação do amortecimento diminui, e o equilíbrio destes dois efeitos contrários conduz a deslocamentos pouco inferiores àqueles previstos no modelo linear.

5.5. Conclusões

Mostrou-se que nos problemas de vibrações lineares, quando o tubo tem extremidades impedidas a deslocamentos transversais, as forças de Coriolis não realizam trabalho, dependem da velocidade, e que no sistema linear discreto são caracterizadas por uma matriz antissimétrica operando sobre o vetor de deslocamentos, ou seja, comportam-se como forças giroscópicas.

Demonstrou-se que as forças associadas com a aceleração centrífuga, dependem dos deslocamentos, podem ser obtidas a par-

tir de uma função potencial, e que no sistema linear discreto são caracterizadas por uma matriz simétrica atuando sobre o vetor de deslocamentos, isto é, comportam-se como forças conservativas.

Utilizando-se o quociente de Rayleigh mostrou-se que no problema de vibrações livres lineares autônomas, se o tubo têm extremidades fixas, os auto-valores sempre ocorrem em pares simétricos, que não podem existir dois auto-valores diferentes para uma mesma auto-função, que se a velocidade de escoamento é menor que a primeira velocidade crítica (auto-valor nulo) todos os auto-valores são imaginários puros e diferentes, e que não ocorre bifurcação no espectro de frequências do problema estacionário ($v=0$). Mostrou-se ainda que, devido à presença do termo associado às forças de Coriolis, podem ocorrer auto-valores complexos com $\text{Re}\lambda \neq 0$, mas que isso só pode acontecer se $v > 1^{\text{a}} v_c$ e ocorrendo anteriormente a coincidência de duas auto-funções originalmente distintas e a correspondente coincidência dos seus auto-valores.

O hamiltoniano e o lagrangiano do sistema foram obtidos, demonstrando-se que, se o tubo tem extremidades fixas e se a velocidade do escoamento é constante, o hamiltoniano se conserva. Se a velocidade depende do tempo o lagrangiano e o hamiltoniano são funções explícitas do tempo. No caso do tubo em balanço, com a caracterização do hamiltoniano, demonstrou-se que as forças de Coriolis realizam trabalho e obteve-se explicitamente a expressão da força não conservativa que atua na extremidade do tubo, proveniente do escoamento do fluido, mostrando que se a velocidade de escoamento é suficientemente pequena e que se o fluxo se

processa da extremidade fixa para a extremidade livre, esta força introduz amortecimento no sistema. A inversão no sentido da velocidade causa também a inversão deste efeito, ou seja, a existência de tubulações com extremidades não fixas, pode ser favorável ou desfavorável do ponto de vista da estabilidade.

Com relação à estabilidade mostrou-se que se o escoamento é uniforme e o tubo tem extremidades fixas ocorre divergência (flambagem), verificando-se que para $v > 1^a v_c$ a posição trivial de equilíbrio é sempre instável. Para velocidades menores que a primeira velocidade crítica, o sistema possui comportamento crítico, sendo necessário a consideração dos termos não-lineares para o julgamento da estabilidade. Quando a velocidade de escoamento é perturbada harmonicamente (sistema não autônomo) pode ocorrer instabilidade dinâmica (ressonância paramétrica), para qualquer valor da velocidade, em todos os modos e nas suas combinações. Aumentando-se a velocidade média alargam-se as regiões da instabilidade o mesmo ocorrendo se se aumenta a sua componente harmônica. Para o tubo em balanço, mostrou-se que quando o fluxo se processa à velocidade constante, existem valores da velocidade para os quais a posição de equilíbrio é assintoticamente estável. Aumentando-se o valor da velocidade pode ocorrer instabilidade dinâmica por flutter, em qualquer modo, mas estando sempre associada a modos isolados. Obteve-se em um exemplo particular de vibrações livres não-lineares o ciclo limite de flutter, comprovando-se que no modelo não-linear as amplitudes do movimento permanecem limitadas. Viu-se também que no caso de tubos em balanço, o amortecimento, que pode ser introduzido no sistema pelo fluxo, é favorável do ponto de vista da estabilidade, pois existe sempre a possibilidade de que para baixas veloci-

des de escoamento não ocorra ressonância paramétrica nos modos inferiores.

Analisaram-se ainda duas tubulações contínuas, as conclusões sendo semelhantes às que foram apresentadas anteriormente. Entretanto, no caso da tubulação com balanços nas extremidades, obteve-se a menor velocidade crítica (flambagem) comprovando neste caso o efeito desfavorável do balanço sobre a estabilidade da tubulação.

Não foram pesquisadas as regiões de ressonância combinatória, que também existem nestes problemas, e o estudo da estabilidade restringiu-se sempre à posição trivial de equilíbrio, que não é a única [27], dada as características não-lineares do problema.

A formulação variacional adotada, permitiu tratar de forma integrada os problemas de resposta dinâmica transiente (linear e não-linear), vibrações livres (linear e não-linear) e estabilidade dinâmica, conduzindo diretamente à obtenção de soluções aproximadas, para o que utilizou-se o método dos elementos finitos, devido à maior versatilidade deste, sobre outros métodos numéricos. A utilização do princípio dos trabalhos virtuais mostrou-se particularmente interessante nestes problemas, por possibilitar a avaliação do efeito do escoamento do fluido sobre o tubo, considerando apenas as partículas de fluido que a cada instante estão no interior do tubo.

Na análise não-linear a utilização da forma incremental, atualizando-se em cada incremento de tempo a configuração de referência, parece ser a mais conveniente neste tipo de problema, já que permite avaliar adequadamente o efeito do escoamen

to do fluido sobre o tubo, este efeito, neste caso, sendo semelhante ao de uma força não conservativa, distribuída sobre a parte da tubulação ocupada pelo fluido e sempre normal ao eixo deformado do tubo. Por outro lado, o uso de uma configuração de referência constituída de elementos retos, permite simplificar o modelo, tornando-o computacionalmente mais eficiente. O erro introduzido nesta simplificação obviamente diminui, se se utiliza um maior número de elementos para a discretização espacial. Entretanto, nos exemplos estudados, situações de grandes deslocamentos e grandes rotações foram analisadas satisfatoriamente, usando-se um número reduzido de elementos.

O exemplo numérico, da resposta transiente de um tubo em balanço, serviu para caracterizar o efeito do amortecimento introduzido no sistema pelo escoamento do fluido, que existe, mesmo no caso em que o tubo está enchendo. A comparação das soluções linear e não-linear usadas nesta análise demonstrou que o modelo linear superestima este efeito.

Os programas existentes [84] a [87] para a análise dinâmica de tubulações de centrais nucleares não levam em consideração os efeitos do escoamento do fluido sobre a tubulação, muito embora tenha-se mostrado que os mesmos alteram substancialmente as propriedades vibratórias do sistema. Além disso, no caso mais geral, o escoamento é sempre forçado por um bombeamento, e viu-se que, quando a velocidade de escoamento é perturbada harmonicamente, existe a possibilidade de instabilidade dinâmica, mesmo quando o fluxo se processa a baixas velocidades. Por isto mesmo, nestes casos, pode ser interessante o uso do modelo desenvolvido neste trabalho na análise destes problemas.

Reconhece-se que para o fluido o modelo utilizado é bastante simplificado. Entretanto, como em regime, normalmente são conhecidas a distribuição de pressão e de velocidade ao longo do circuito, uma primeira aproximação bastante razoável do ponto de vista de verificação do efeito do escoamento sobre as vibrações da tubulação, seria usar este modelo, considerando-se uma pressão $p=p(s,t)$ e uma velocidade média $\dot{\xi}=\dot{\xi}(s,t)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GALEÃO, A.C.; LOULA, A.F. e BEVILACQUA, L. - Dynamics of Beams Carrying Moving Loads. III COBEM, Vol. D, p.881-894, Rio de Janeiro, 1975.
- [2] LOULA, A. e GALEÃO, A.C. - Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares. Publicação Didática, COPPE/UFRJ, 1976.
- [3] GUERREIRO, J.; LOULA, A.F. e GALEÃO, A.C. - Cargas Míveis em Vigas de Seção Celular. XVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Salvador, 1976.
- [4] YOSHIDA, D.M. - Dynamic Response of Beams and Plates to Moving Loads. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1970.
- [5] YOSHIDA, D.M. and WEAVER, W. - Finite-Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads. International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 31-I, p. 179-195, 1971.
- [6] PAIDOUSSIS, M. and ISSID, N. - Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid. Journal of Sound and Vibration, Vol. 33, p. 267-294, 1974.
- [7] McIVER, D.B. - Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass. Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7(3), p.249-261, 1973.
- [8] BENJAMIN, T.B. - Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I.Theory). Proceedings of the Royal Society, A261, p. 457-486, 1961.

- [9] HOUSNER, G.W. - Bending Vibrations of Pipeline Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, p. 205-208, 1952.
- [10] PAIDOUSSIS, M.P. - Dynamics of Tubular Cantilevers Conveying Fluid. Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 12(2), p. 85-103, 1970.
- [11] LOULA, A.F.; GALEÃO, A.C. e BEVILACQUA, L. - Estabilidade de Tubos Conduzindo Fluidos com Fluxo Periódico. Colóquio Franco-Brasileiro sobre Métodos Numéricos em Engenharia , Rio de Janeiro, 1976.
- [12] MOVCHAN, A.A. - On one Problem of Stability of a Pipe with a Fluid Flowing Through It. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 29, p. 760-762, 1965.
- [13] NAGULESWARAN, S. and WILLIAMS, J.H. - Lateral Vibration of a Pipe Conveying a Fluid. Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 10, p. 228-238, 1968.
- [14] BOHN, M.P. and HERRMAN, G. - The Dynamic Behavior of Articulated Pipes Conveying Fluid with Periodic Flow Rate. Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, p. 55-62, 1974.
- [15] GINSBERG, J.H. - The Dynamic Stability of a Pipe Conveying a Pulsatile Flow. International Journal of Engineering Science, Vol. 11, p. 1013-1024, 1973.
- [16] PAIDOUSSIS, M.P. and ISSID, N.T. - Experiments on Parametric Resonance of Pipes Containing Pulsatile Flow. Journal of Applied Mechanics, p. 198-202, 1976.
- [17] BOLOTIN, V.V. - The Dynamic Stability of Elastic Systems. Holden-Day Inc., 1964.

- [18] WEAVER, D.S. and UNNY, T.E. - On the Stability of Fluid-Conveying Pipes. Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, p. 48-52, 1973.
- [19] WEAVER, D.S. and PAIDOUSSIS, M.P. - On Collapse and Flutter Phenomena in Thin Tubes Conveying Fluid. Journal of Sound and Vibration, Vol. 50(1), p.177-132, 1977.
- [20] PAIDOUSSIS, M.P. and PETTIGREW, M.J. - Dynamics of Flexible Cylinders in Axisymmetrically Confined Axial Flow. Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, p. 37-44, 1979.
- [21] CHEN, S.S. - Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.51, p. 223-232, 1972.
- [22] SVETLITSKY, V.A. - Vibration of Tubes Conveying Fluids. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 62 (3), p. 595-600, 1977.
- [23] SINGH, K. - Predicting Flow Induced Vibration in U-Bend Regions of Heat Exchangers: An Engineering Solution. Journal of the Franklin Institute, Vol. 302(2), p. 195-204, 1976.
- [24] HANNOYER, M.J. and PAIDOUSSIS, M.P. - Dynamics of Slender Tapered Beams with Internal or External Axial Flow (Part 1: Theory). Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, p.45-51, 1979.
- [25] HONNOYER, M.J. and PAIDOUSSIS, M.P. - Dynamics of Slender Tapered Beams with Internal or External Axial Flow (Part 2: Experiments). Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, p. 52-57, 1979.

- [26] THURMAN, A.L. and MOTE, C.D. - Nonlinear Oscillation of a Cylinder Containing a Flowing Fluid. Journal of Engineering for Industry, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 91, p. 1147-1155, 1969.
- [27] HOLMES, P.J. - Pipes Supported at Both Ends Cannot Flutter. Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, p. 619-622, 1978.
- [28] HOLMES, P.J. - Bifurcations to Divergence and Flutter in Flow-Induced Oscillations: A Finite Dimensional Analysis. Journal of Sound and Vibration, Vol. 53(4), p.471-503, 1977.
- [29] HOLMES, P.J. and MARSDEN, J. - Bifurcation to Divergence and Flutter in Flow-Induced Oscillations: A Infinite Dimensional Analysis. Automatica, Vol. 14, p. 367-384, 1978.
- [30] GALEÃO, A.C. - Resposta Dinâmica Não-Linear de Tubos com Escoamento Interno. V COBEM, Vol. C, p. 137-147, 1979.
- [31] MOTE, C.D. - Nonconservative Stability by Finite Element. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM.3, p. 645-656, 1971.
- [32] BEVILACQUA, L.; GALEÃO, A.C. e LOULA, A.F. - Análise Numérica da Dinâmica de Tubulações com Escoamento Interno. Colóquio Franco-Brasileiro sobre Métodos Numéricos em Engenharia, Rio de Janeiro, 1976.
- [33] SHIEH, R.C. - Energy and Variational Principles for Generalized (Gyroscopic) Conservative Problems. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 5, p.495-509, 1971.

- [34] NEWMARK, H.M. - A Method of Computation for Structural Dynamics. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 85, EM.3, p. 67-94, 1959.
- [35] STEIN, R.A. and TOBRINER, M.W. - Vibration of Pipes Containing Flowing Fluids. Journal of Applied Mechanics, Vol. 92, p. 906-916, 1970.
- [36] PAIDOUSSIS, M.P. and DEKSNIS, E.B. - Articulated Models of Cantilevers Conveying Fluid: The Study of a Paradox. Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 12(4), p. 288-300, 1970.
- [37] BOHN, M.P. and HERRMAN, G. - Instabilities of a Spatial System of Articulated Pipes Conveying Fluid. Journal of Fluids Engineering, p. 289-296, 1974.
- [38] PAIDOUSSIS, M.P. - Vibration of Cylindrical Structures Induced by Axial Flow. Aëro-Hydro-Elasticité, Collection du Centre de Recherches et D'Essais de Chatou, p. 197-278, Eyroles, Paris, 1973.
- [39] PAIDOUSSIS, M.P. - Vibrations of Tubes Containing Flowing Fluid. Aëro-Hydro-Elasticité, Collection du Centre de Recherches et D'Essais de Chatou, p. 441-500, Eyroles, Paris, 1973.
- [40] MATSUZAKI, Y. and FUNG, Y.C. - Unsteady Fluid Dynamic Forces on a Simply-Supported Circular Cylinder of Finite Length Conveying a Flow, with Applications to Stability Analysis. Journal of Sound and Vibration, Vol. 54(3), p. 317-330, 1977.

- [41] MATSUZAKI, Y. and FUNG, Y.C. - Nonlinear Stability Analysis of a Two-Dimensional Model of an Elastic Tube Conveying a Compressible Flow. Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, p. 31-36, 1979.
- [42] BATHE, K.J.; RAMM, E. and WILSON, E.L. - Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, p. 353-386, 1975.
- [43] GURTIN, C. - An Introduction to Classical Mechanics. Notas não publicadas, Cargenie-Mellon University, Pittsburgh.
- [44] TRUESDELL, C. - The Elements of Continuum Mechanics. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [45] FEIJÓO, R.A. - Introduccíon a Mecanica del Continuo. I Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de Cálculo, CBPF/CNPq, 1978.
- [46] LAI, M.; RUBIN, D. and KREMPL, E. - Introduction to Continuum Mechanics. Pergamon-Press Inc., 1974.
- [47] LARSEN, P.K. and POPOV, E.P. - A Note on Incremental Equilibrium Equations and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations. Acta Mechanica, Vol. 19, p. 1-14, 1974.
- [48] HIBBIT, H.D.; MARÇAL, P.V. and RICE, J.R. - A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement. International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, p. 1069-1086, 1970.

- [49] TAROCO, E.; FEIJÓO, R.A. e MARTINS, L.C. - Forma Incremental del Teorema de Los Trabajos Virtuales Aplicado a Grandes Deformaciones. 19 Simpósio sobre Métodos Numéricos en La Mecânica del Contínuo, p. 199-206, 1977.
- [50] NAYLOR, A.W. and SELL, G.R. - Linear Operator Theory in Engineering and Science. Holt, 1971.
- [51] WASHIZU, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press Inc., 1968.
- [52] HOLDEN, J.T. - On the Finite Deflections of Thin Beams. International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, p. 1051-1055, 1972.
- [53] HAISLER, W.E. and STRICKLIN, J.A. - Displacement Incrementation in Non-Linear Structural Analysis by the Self-Correcting Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, p. 3-10, 1977.
- [54] RANGANATH, S. and CLIFTON, R.J. - Finite Deflection Dynamics of Elastic Beams. International Journal of Solids and Structures, Vol. 10, p. 557-568, 1974.
- [55] BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L. and KLEIN, M.J. - Large Displacement, Transient Analysis of Space Frames. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, p. 65-84, 1977.
- [56] ORAN, C. and KASSIMALI, A. - Large Deformation of Framed Structures under Static and Dynamic Loads. Computer and Structures, Vol. 6, p. 539-547, 1976.
- [57] MEIROVITCH, L. - Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1970.

- [58] MEIROVITCH, L. - Analytical Methods in Vibrations. MacMillan, New York, 1970.
- [59] MEIROVITCH, L. - A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems. AIAA Journal, Vol. 12(10), p. 1337-1342, 1974.
- [60] PLAUT, R.H. - Alternative Formulations for Discrete Gyroscopic Eigenvalue Problems. AIAA Journal, Vol. 14(4), p.431-435, 1976.
- [61] BECKENBACH, E.F. and BELLMAN, R. - Inequalities. Springer-Verlag, 1961.
- [62] PADOVAN, J. - Traveling Waves Vibrations and Buckling of Rotating Anisotropic Shells of Revolution by Finite Elements. International Journal of Solids and Structures, Vol. 11, p. 1367-1380, 1975.
- [63] MOVCHAN, A.A. - The Direct Method of Liapunov in Stability Problems of Elastic Systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 23, p. 483-493, 1959.
- [64] HUSEYN, K. and PLAUT, R.H. - Application of the Rayleigh Quotient to Eigenvalue Problems of Pseudo-Conservative Systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 33(2), p.201-210, 1974.
- [65] BALL, J.M. - Stability Theory for an Extensible Beam. Journal of Differential Equations, Vol. 14, p. 399-418, 1973.
- [66] WILEY, J.C. and FURKERT, R.E. - Beams Subjected to Follower Force within the Span. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM.6, p. 1353-1364, 1972.

- [67] NEMAT-NASSER, S. and HERRMANN, G. - Torsional Instability of Cantilevered Bars Subjected to Nonconservative Loading. Journal of Applied Mechanics, p. 102-104, 1966.
- [68] STRANG, G. and FIX, G.F. - An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, 1973.
- [69] ODEN, J.T. - Finite Elements of Non-Linear Continua. McGraw-Hill, 1972.
- [70] ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, 1971.
- [71] PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, 1968.
- [72] CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1975.
- [73] BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1976.
- [74] BATHE, K.J. - Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis Using Adina. Report-82448-2, M.I.T., 1977.
- [75] BOLOURCHI, S. and BATHE, K.J. - A Geometric and Material Nonlinear Three-Dimensional Beam Element. Report-82448-4, 1977.
- [76] RICHTMEYER, R.D. and MORTON, K.W. - Difference Methods for Initial Value Problems. Interscience, New York, 1967.
- [77] LAX, P.D. and RICHTMEYER, R.D. - Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations. Communications of Pure and Applied Mathematics, Vol.IX, p.267-293, 1956.

- [78] NICKELL, R.E. - On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics. International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, p. 301-319, 1971.
- [79] GOUDREAU, G.L. and TAYLOR, R.L. - Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 2, p.69-97, 1972.
- [80] BOLOTIN, V.V. - On the Concept of Stability in Structural Mechanics. Conference on Stability Problems in Structural Mechanics, Moscow, 1965.
- [81] CESARI, L. - Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1959.
- [82] LEE, T. - A Study of Coupled Mathieu Equations by Use of Infinite Determinants. Journal of Applied Mechanics, p.349-352, 1976.
- [83] BURGAT, C. et MIRA, C. - Sur une Methode de Determination de Exposants Caractēristiques d'un Systeme d'Equations Differentielles Linēaires ā Coefficients Periodiques.
- [84] Pipe Static and Dynamic Analysis Software System - PIPESD - User Information Manual. Control Data Corporation, 1974.
- [85] Static, Thermal, Dynamic Pipe Stress Analysis - ADLPIPE - User Information Manual. Control Data Corporation, 1974.
- [86] Pipe Stress Analysis - PAS5 - User Guide. Whessoe Technical Computing Services.
- [87] GALEÃO, A.C.; GUERREIRO, N.J. e BARBOSA, H.J. - Um Sistema Automātico para a Anālise Estrutural de Tubulações. III Simpōsio sobre Sistemas Computacionais para Eng. Civil, I Con

gresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Vol. 1, p. 109-128, 1979.

SIMBOLOGIA

$(.)$	- produto escalar de vetores ou tensores
(\otimes)	- produto tensorial
(\wedge)	- produto vetorial
(x)	- produto cartesiano
(\sim)	- vetor, tensor, matriz
$()^T$	- transposta de um vetor, de um tensor ou de uma matriz
$\{ \underline{e}_i \}$	- base cartesiana de vetores
$(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$	- base cartesiana de tensores
$()_{ij}$	- componente de um tensor na base $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ ou elemento de uma matriz
$()_i$	- componente de um vetor na base \underline{e}_i ou elemento de uma matriz coluna ("vetor")
\underline{I}	- tensor identidade ou matriz unitária
\underline{Z}	- tensor antissimétrico, ou matriz antissimétrica
\exists	- existe
\forall	- para todo
0	- ordem
\cap	- interseção
\in	- pertence
$\text{tr}()$	- traço de um tensor
$\text{Re}()$	- parte real de um complexo
$\text{Im}()$	- parte imaginária de um complexo
$\det()$	- determinante de um tensor ou de uma matriz
$()^*$	- solução conhecida ou valor prescrito
$()^*$	- solução perturbada

$(-)$	- conjugado de um complexo
$\ \quad \ $	- norma
$ \quad $	- módulo
δ	- variação
t	- tempo
Δt	- incremento de tempo
$t_{r+1} = t_r + \Delta t$	
$(\quad)' = \partial(\quad) / \partial X_1$	
$(\quad)_{,s} = \partial(\quad) / \partial s$	
\mathbb{R}	- reta real
$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	
H^r	- espaço de Sobolev de ordem r
$L_2 \equiv H^0$	
\mathcal{V}	- conjunto cinematicamente admissível
$\tilde{\mathcal{V}}$	- espaço das variações admissíveis
\mathbb{B}	- corpo
\mathbb{B}_t	- configuração atual de \mathbb{B}
\mathbb{B}_c	- configuração fixa de referência de \mathbb{B}
\mathbb{B}_r	- configuração de \mathbb{B} no instante $t = t_r$
\underline{X}	- ponto material
\underline{x}	- lugar ocupado por \underline{X} na configuração atual
$\underline{\bar{x}}$	- lugar ocupado por \underline{X} na configuração fixa \mathbb{B}_c
\mathbb{P}	- parte de \mathbb{B}
$\partial \mathbb{P}$	- contorno de \mathbb{P}
$m(\mathbb{P})$	- massa de \mathbb{P}
ρ_c	- densidade de massa na configuração de referência

\underline{p}	- descrição espacial do movimento
\underline{p}_c	- descrição referencial do movimento
∇	- gradiente em relação a \underline{x}
grad	- gradiente em relação a \underline{x}
Div	- divergente em relação a \underline{x}
div	- divergente em relação a \underline{x}
\underline{F}	- gradiente de deformação
\underline{E}	- tensor de deformação de Green-Lagrange
\underline{E}_ℓ	- parte linear do tensor do \underline{E}
$\underline{E}_{n\ell}$	- parte não-linear do tensor \underline{E}
\underline{E}	- tensor constitutivo
E	- módulo de elasticidade do material
\underline{T}	- tensor de tensões de Cauchy
\underline{S}_1	- tensor de tensões de P-K de 1. ^a espécie
\underline{S}_2	- tensor de tensões de P-K de 2. ^a espécie
\underline{u}	- campo de deslocamentos referido à configuração atual
$\dot{\underline{u}}$	- campo de velocidades referido à configuração atual
$\ddot{\underline{u}}$	- campo de acelerações referido à configuração atual
\underline{u}	- campo de deslocamentos referido à configuração de referência
$\dot{\underline{u}}$	- campo de velocidades referido à configuração de referência
$\ddot{\underline{u}}$	- campo de acelerações referido à configuração de referência

\tilde{b}	- densidade da força de massa na configuração atual
\tilde{s}	- densidade da força de superfície na configuração atual
\tilde{b}	- densidade da força de massa na configuração de referência
\tilde{s}	- densidade da força de superfície na configuração de referência
\hat{u}	- deslocamento virtual
\bar{W}	- trabalho virtual das forças externas
\dot{W}	- potência das forças externas
W	- trabalho das forças externas
$r+1_c()$	- variável relativa à configuração B_{r+1} referida à configuração fixa B_c
$r+1_r()$	- variável relativa à configuração B_{r+1} referida à configuração B_r
$c()$	- incremento da variável, da configuração B_r a B_{r+1} , referido à configuração fixa B_c
$r()$	- incremento da variável, da configuração B_r a B_{r+1} , referido à configuração B_r
μ	- densidade do material do tubo
ρ	- densidade do fluido
A	- área da seção transversal do tubo
I	- momento de inércia da seção transversal do tubo
A_f	- área da seção interna do tubo
L	- comprimento do tubo

u_1, u_2	- componentes na base $\{\underline{e}_i\}$ do deslocamento de um ponto do eixo do tubo
$\underline{e}_t, \underline{e}_n$	- vetores unitários tangente e normal ao eixo do tubo na configuração deformado
u_s, u_n	- componentes nas direções \underline{e}_t e \underline{e}_n respectivamente, dos incrementos de deslocamento de um ponto do eixo do tubo
ϕ	- rotação da seção transversal do tubo
$\dot{\xi}$	- velocidade de escoamento do fluido
$\ddot{\xi} = d\dot{\xi}/dt$	
g	- módulo da aceleração da gravidade
θ	- define a inclinação do eixo do tubo em relação à vertical (direção de atuação da aceleração da gravidade)
p	- pressão interna
N^*	- esforço normal
M^*	- momento fletor
V^*	- cortante
H	- hamiltoniano
L	- lagrangiano
T	- energia cinética
V	- energia potencial
\underline{u}^h	- solução aproximada
$\Phi_\ell (\ell=1,2,3,4)$	- polinômios cúbicos de Hermite
$\Psi_\ell (\ell=1,2)$	- polinômios lineares
$\underline{\ddot{D}}$	- vetor das acelerações nodais

- $\dot{\underline{D}}$ - vetor das velocidades nodais
- \underline{D} - vetor dos deslocamentos nodais
- \underline{r}^D - vetor dos incrementos de deslocamentos nodais
- \underline{r}^{+1}_R - vetor de forças externas nodais que atuam no instante t_{r+1}
- \underline{r}^F - vetor de forças nodais, conhecido no instante t_r , devido aos esforços internos e às ações do fluido que dependem dos deslocamentos conhecidos neste instante
- \underline{M} - matriz de massa atua sobre o vetor de acelerações nodais
- \underline{C} - matriz de "Coriolis" atua sobre o vetor de velocidades
- \underline{K} - matriz de rigidez atua sobre o vetor de deslocamentos
- ω - auto-valor associado ao problema de vibrações livres
- $\text{Im}\omega$ - frequência de vibração
- $T = \frac{2\pi}{\text{Im}\omega}$ - período de vibração
- \mathcal{H}_0 - matriz hessiana

Parâmetros adimensionais

- x - abcissa adimensional
- η - deslocamento transversal adimensional
- τ - tempo adimensional
- β - relação entre a massa do fluido e a massa total (tubo + fluido)
- v - velocidade adimensional de escoamento

- γ - parâmetro que leva em conta a ação da gravidade
- Γ - pressão interna adimensional
- v - esforço normal adimensional
- λ - auto-valor do problema adimensional
- Λ - auto-valor adimensional, no caso $v = 0$

Se a velocidade de escoamento é uma função periódica do tempo: $v = v_0 (1 + \alpha \cos \Omega t)$

- v_0 - velocidade média adimensional
- Ω - frequência adimensional do pulso de velocidades
- α - relação entre a amplitude do pulso e a velocidade média